Wiskunde en biologie

Gilberte Verbeeck
Sint Jozefinstituut Essen, Belgium
Specifieke lerarenopleiding UA, Antwerpen
Email: gilberte.verbeeck@ua.ac.be

Er zijn vele domeinen waarin wiskunde en biologie elkaar ontmoeten. Enerzijds vind je in biologieboeken heel wat grafiekjes en opdrachten die niet zouden misstaan in een wiskundeboek. Anderzijds wordt, vooral in de hogere jaren, wiskunde gebruikt om moeilijkere biologische onderwerpen te beschrijven. Hier staat wiskunde eerder ten dienste van de biologie. We zijn op zoek gegaan naar de banden tussen de twee vakken. Dit resulteerde in een aantal lesideeën en een aanbod voor de vrije ruimte.

Woord vooraf

Deze bijdrage is ontstaan uit een zoektocht naar de banden tussen wiskunde en biologie. Samen met Regi Op de Beeck schreef ik een aantal artikels voor het wiskunde tijdschrift ‘Uitwiskeling’ waar we inzoomden op raakpunten tussen beide vakken. Dit vormde de eerste aanzet. Aan de Specifieke Lerarenopleiding van de UA leerde ik Sabine van Roose kennen. Beide zijn we praktijkassistenten, ik voor vakdidactiek wiskunde en Sabine voor vakdidactiek biologie. In het kader van onze opdracht zaten we rond het bovenstaande thema samen. We hebben in het begin vooral veel uitgewisseld en veel gepraat over onze ervaringen. Sabine vertelde over haar ervaring met een project voor de Vrije Ruimte (enkele uren per week die scholen vrij kunnen invullen voor projectwerk e.d.) waar de nadruk ligt op een aantal biologische aspecten. Gilberte zag hierin wel wat wiskundige zijsporen.. Sabine nam de artikels uit Uitwiskeling met haar collega’s onder de loep en dit leverde weer nieuwe ideeën. Een aantal resultaten van onze besprekingen en ons werk vind je in deze bijdrage.

In februari 2007 brachten we in een nascholing leerkrachten samen uit verschillende vakdisciplines. We ontwikkelden teksten bedoeld voor beide groepen: specialisten en leken van zowel wiskunde als biologie. De teksten die eerder bedoeld waren om de wiskundige achtergronden voor de biologen te verduidelijken hebben we verwijderd. De gebruikte biologische achtergronden worden verduidelijkt voor de wiskundeleerkracht.

We besteden in de cursus aandacht aan het gebruik van de grafische rekenmachine (GRM). Hierbij gebruiken we de TI83/84. We maakten teksten aan met schermafdrukjes om biologieleerkrachten doorheen het gebruik van de GRM te loodsen. Deze teksten zijn niet allemaal in de nota’s opgenomen, maar kan je bij ons aanvragen.

In het eerste deel komen ideeën aan bod voor projecten in de Vrije Ruimte. De leerlingen werken aan vaardigheden. We hebben doelstellingen voor ogen die terug te vinden zijn in de vakoverschrijdende eindtermen (minimumdoelstellingen die elke leerling in Vlaanderen moet bereiken). De onderwerpen komen uit de biologische hoek en zijn eerder beknopt omschreven. Een volledige tekst is beschikbaar en kan je aanvragen. We gaan uitgebreider in op de wiskunde die ter ondersteuning aan de projecten gekoppeld kan worden.

In het tweede deel komen lesideeën aan bod. Hier levert de biologie contexten voor de wiskundeles. Het tweede deel levert daarenboven ideeën voor de Vrije Ruimte. De mogelijke projecten die hieruit kunnen voortvloeien, hebben een wiskundig accent. Leerlingen zullen meer vakkennis opdoen. Populatiedynamiek en genetica zijn twee onderwerpen die zeer uitgebreid aan bod komen. Té uitgebreid om in het kader van de gewone lessen volledig te behandelen.

We vonden het zelf interessant om uit te wisselen over onze eigen vakken en linken bij elkaar te ontdekken. We hebben heel wat geleerd over elkaars vak. We hopen de openheid de we hiervoor nodig hadden en het enthousiasme dat we ervoeren over te brengen.

Deel 1: Vrije ruimte

1 Inleiding

De lessentabellen voor de derde graad ASO laten de scholen, afhankelijk van de studierichting, één tot vier uren ruimte om experimenten en projecten een plaats te geven. Deze uren, Vrije Ruimte genoemd, scheppen nieuwe uitdagingen. Het invullen ervan is echter niet altijd even gemakkelijk.

In wat volgt beschrijven we kort twee mogelijke projecten die vanuit een biologische context behandeld worden: expeditie zeeleeuw en het overzetten van padden.

2 Expeditie zeeleeuw en planet zee

Expeditie Zeeleeuw was een gratis ICT-gestuurd project (www.expeditiezeeleeuw.be) met kant-en-klare modules rond wetenschap. Jongeren uit de derde graad TSO, ASO, KSO en BSO maakten een virtuele verkenningstocht langs de Belgische kust met het oceanografische onderzoeksschip de Zeeleeuw. Onderweg werden zij gevraagd oplossingen te zoeken voor levensnabije problemen. Deze problemen zijn representatief voor het werk van een vijfhonderdtal wetenschappers actief aan de Noordzee.

De onderwerpen werden aangeboden in verschillende modules. In de edities van 2005, 2006 en 2007 werden o.a. de volgende modules aangeboden: klimaat, scheepvaart en visserij (TSO), biodiversiteit, vervuiling, erfgoed en zeelucht (ASO), strandafval, ruimtelijke planning en oorlogsmunitie (BSO). Elke module is ongeveer op dezelfde manier opgevat. Door op de website items als *diareeks*, *interactieve kernmodel*', *voorstelling van het probleem*,… aan te klikken, krijgt de leerling zicht op het probleem en de vragen die hij moet beantwoorden. Een *kernlink* moet hem een eind op weg helpen. Via het *discussieforum* komen de leerlingen in contact met een wetenschappelijke begeleider van het project en de andere deelnemers. In elke module wordt *veldwerk* aangeraden en zo wordt het geheel een mooie afwisseling tussen theorie en praktijk.

Het Sint Cordula instituut, de secundaire school waar Sabine biologie onderwijst, koos de onderdelen: biodiversiteit, strandafval en erfgoed en werkte hierrond een project uit voor de vrije ruimte. Voor het veldwerk van de module biodiversiteit en strandafval hebben zij samengewerkt met de vzw Horizon Educatief te Oostende. Deze modules werden als zeer boeiend ervaren in tegenstelling tot de module erfgoed waarbij het praktisch werk geen verband bleek te hebben met de theorie.

Het gehele project werd uitgewerkt en ondersteunt door het Vlaams Instituut voor de Zee (VLIZ) te Oostende. Met Expeditie Zeeleeuw wilden de organisatoren een duidelijker beeld scheppen rond het onderzoek aan de Noordzee. Het materiaal van de website www.expeditiezeeleeuw.be is nog steeds beschikbaar. Het project bestaat echter niet meer in de vorm zoals Sabine het met haar klas heeft uitgevoerd.

Momenteel heeft men het geheel onderworpen aan een grondige update en is er een vervolg uitgewerkt ‘Planeet Zee’. Het werkveld blijft niet meer beperkt tot het Belgisch deel van de Noordzee maar strekt zich over de gehele wereldzee uit. Er is een werdstrijd verbonden aan het project. Meer info vind je op http://www.planeetzee.org

3 Paddenoverzet

Padden migreren. Gewoonlijk rond eind februari gaan zij op zoek naar hun (vaste) poel om te paren. Door het alsmaar toenemende verkeer zijn er verschillende punten in Vlaanderen en Nederland waar natuurliefhebbers de padden op gevaarlijke punten, daar waar ze een weg moeten oversteken, een handje helpen. Er worden netten ingegraven langs de kant van de weg. De padden kunnen niet verder en volgen deze netten. Op het einde van het net valt de pad in een emmer. ’s Avonds worden deze emmers aan de overkant van de weg geledigd en de pad vervolgt zijn trek.

We werkten een project uit dat tijdens het schooljaar 2007-2008 uitgetest werd in het Sint Cordula instituut te Schoten. De leerlingen leren over de problematiek van de padden, bepalen de waterkwaliteit en verzamelen afval. Ze organiseren actief mee de paddenoverzet van de aanvragen bij de gemeente tot en met de overzet. Zij leren over de verschillende ontwikkelingsvormen van de padden en verwerken alle gegevens die zij tijdens het project hebben opgetekend en opgemeten.

De vzw Natuurpunt is erg actief bij deze paddenproblematiek. Zij hebben heel wat lokale afdelingen waarmee geïnteresseerde leerkrachten kunnen samenwerken. Het voordeel van lokaal werken is dat leerlingen actief betrokken zijn bij de milieuproblematiek in de omgeving. Om zinnig veldwerk te doen, moeten ze zich daarenboven nauwelijks verplaatsen. Informatie van de vzw en zijn werkzaamheden vind je op www.natuurpunt.be. Meer informatie over het door ons uitgewerkte project vind je via Sabine Van Roose (sabine.vanroose@ua.ac.be).

In Nederland vind je op de site van Instituut Voor Natuursbeschermingseducatie informatie over georganiseerde paddenoverzetten. De site http://www.ivn.nl vormt mogelijks een ingangspoort tot een samenwerking op schoolniveau. Dit hebben we echter niet onderzocht.

4 Mogelijke wiskundige ondersteuning

4.1 Expeditie zeeleeuw – planeet zee

Hoewel het project van naam veranderde lijkt het ons interessant te schetsen wat men vanuit ‘Expeditie zeeleeuw’ aan wiskundige ondersteuning kon bieden. Gezien men ‘planeet zee’ op een vergelijkbare manier opbouwde, zullen analoge acitviteiten kunnen plaatsvinden.

Tijdens de module Biodiversiteit moeten de leerlingen kruien en scheppen ze grijze garnalen op. Ze meten de lengte van de garnalen en dit zijn perfecte meetwaarden om de geleerde kennis m.b.t. statistiek in te oefenen.

In het vierde jaar leerden zij het onderscheid tussen verschillende soorten gegevens. We onderscheiden o.a. discrete en continue gegevens. Discrete gegevens zijn gegevens die aantallen weergeven zoals het aantal kinderen in een gezin of het aantal zonsverduisteringen in een eeuw. Continue gegevens kunnen alle mogelijke waarden aannemen tussen bepaalde grenzen zoals de lengte van de leerlingen of het gewicht van boekentassen. De lengte van de garnaal is dus een continu gegeven.

Verder leerden zij om een groot aantal continue gegevens overzichtelijk voor te stellen in een frequentietabel met klassenindeling. Een klasse is een “links gesloten – rechts open” interval. [3;3,5[is een voorstelling van een klasse waarbij de lengte van een garnaal 3 cm of meer is maar kleiner dan 3,5 cm. Om de klasse op een grafiek voor te stellen, of om berekeningen uit te voeren hebben we het klassenmidden nodig. De leerlingen kunnen nu aan het turven gaan. In de kolom van de absolute frequentie schrijven ze het aantal garnalen dat een lengte heeft in de bijhorende klasse. Voor de klasse hierboven vermeld, noteert men dus het aantal garnalen dat 3 cm of langer is maar korter dan 3,5 cm.

De resultaten die de leerlingen van het Sint Cordula instituut vonden, vind je in de onderstaande tabel:

Klasse	Klassenmidden	Absolute frequentie
[3;3,5[	3,25	5
[3,5;4[	3,75	10
[4;4,5[	4,25	12
[4,5;5[	4,75	25
[5;5,5[	5,25	12
[5,5;6[	5,75	14
[6;6,5[	6,25	6
	Totaal aantal meetwaarden:	84

Deze gegevens kunnen verwerkt worden in Excell. In heel wat scholen werken de wiskundeleerkrachten met een GRM. Bovenstaande gegevens vormen goede meetwaarden om met behulp van een GRM te verwerken:

- Gegevens invoeren in lijsten,
- Gemiddelde en standaardafwijking berekenen,
- Een histogram tekenen
- De relatieve frequentie bepalen
- Het histogram benaderen door een normale dichtheidskromme
- Benaderend oplossen van vragen als ‘Hoeveel procent van de garnalen is minstens 4cm groot maar minder dan 5,5cm?’

Zoals in het voorwoord vermeld, hebben we een tekst die de leerkracht (of leerling) doorheen het gebruik van de GRM loodst m.b.t. de bovenstaande onderwerpen.

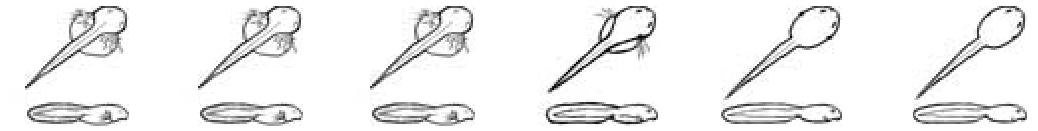
Tijdens de module Strandafval rapen de leerlingen heel wat afval op. Deze gegevens kunnen voorgesteld worden in een taart- en blokdiagram.

4.2 Paddenoverzet

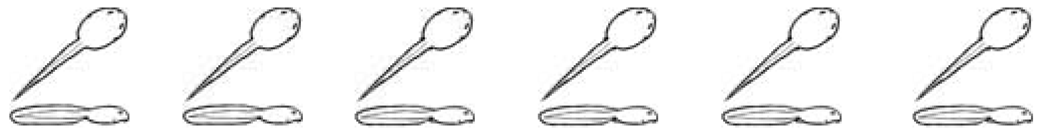
De leerlingen gaan in april een poel bezoeken om de kikkers en padden die ze bij de overzet hebben ‘gered’ terug te observeren. Ondertussen hebben deze kikkers en padden eieren gelegd in de poel. Deze eieren zijn gaan ontwikkelen. Al naargelang de temperatuur kan dit sneller of trager gaan. In deze groei kan je verschillende stadia onderscheiden. De onderstaande tabel geeft een idee wat met deze stadia bedoeld wordt:

Gosner Stages*
a printable table for staging from
natures-web.org

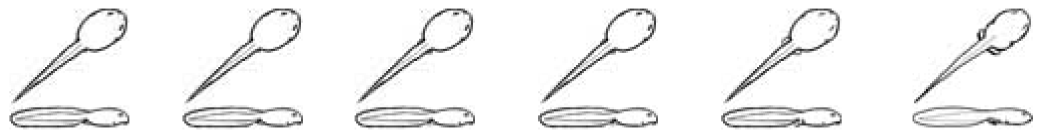
stage 1 stage 5 stage 10 stage 15 stage 17 stage 19



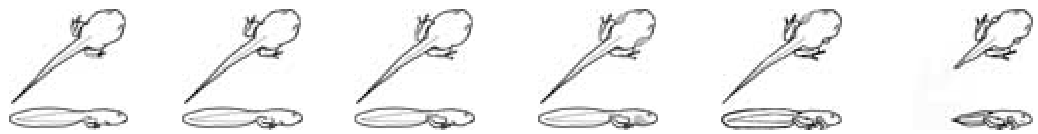
stage 20 stage 21 stage 22 stage 23 stage 24 stage 25



stage 26 stage 27 stage 28 stage 29 stage 30 stage 31



stage 32 stage 33 stage 34 stage 35 stage 36 stage 37



stage 38 stage 39 stage 40 stage 41 stage 43 stage 44

stage 47

*Stages of developing frogs are based (as much as possible) on K.L. Gosner's anuran embryo staging tables. (Gosner, K.L. 1960. A Simplified Table for Staging Anuran Embryos and Larvae. Herpetologica, 16: 183-190)

De bovenstaande tabel is bewust eenvoudig gehouden. Hij kan zo gebruikt worden door leerlingen die geen ervaring hebben bij het bepalen van een stadium. Bij de wetenschappelijke benadering gebruikt men een andere terminologie voor deze verschillende stadia. Men onderscheidt 4 stadia en geeft deze aan met de Romeinse cijfers I, II, III en IV. Deze stadia worden nog eens onderverdeeld in een aantal deelstadia. Deze deelstadia worden bepaald door een Arabisch cijfer te koppelen aan het Romeinse cijfer. De verschillende stadia hebben geen enkele relatie met de tijd. Dus stadium I duurt niet evenlang als stadium II, stadium I1, duurt niet evenlang als stadium I2.

De bedoeling is dat de leerlingen m.b.v. de eenvoudige tabel een aantal stadia kunnen onderscheiden. We kunnen de kikkers echter niet lang genoeg volgen om een echte evolutie te zien. Vandaar dat we gebruik maken van meetwaarden die Sabine experimenteel vond door kikkers in een laboratorium te volgen. Daarvoor heeft zij de gedetaillerdere wetenschappelijke tabel. Stage en stadium komen bij deze tabellen niet helemaal overeen. Zo komt II13 overeen met stage 15, IV2 met stage 37.

De onderstaande tabel geeft de meetwaarden voor een experiment waarbij 30 bevruchte eitjes van Bufo bufo werden uitgezet in water van 10°C, 20°C, 25°C en 30°C en gedurende ongeveer 14 dagen werden gevolgd. Bufo bufo is de gewone pad. Aangezien geen enkele pad uit water van 30°C met succes naar stadium IV kon gaan, besliste men om 25°C te proberen. Dit verklaart waarom er geen verdere metingen zijn van 30°C en waarom 25°C pas later gestart werd.

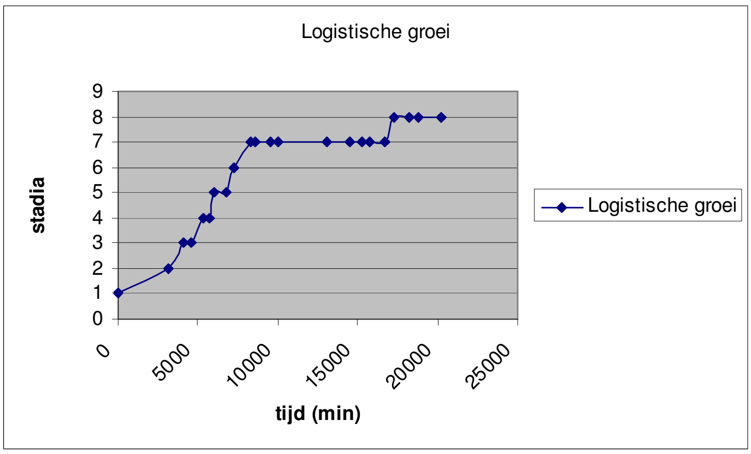
Datum		10°C	20°C	25°C	30°C
vrijdag 17 april 1987	15.15 u	II13	II13		II13
zondag 19 april 1987	19.15 u	III3	III6		III6
maandag 20 april 1987	11.00 u	III3	III7		III8
maandag 20 april 1987	20.00 u	III3	III7		III9
dinsdag 21 april 1987	08.15 u	III4	III8		III10
dinsdag 21 april 1987	14.45 u	III4	III8		III10
dinsdag 21 april 1987	19.30 u	III4	III9		
woensdag 22 april 1987	08.00 u	III4	III9		
woensdag 22 april 1987	17.00 u	III4	III10		
donderdag 23 april 1987	10.15 u	III4	IV1		
donderdag 23 april 1987	16.15 u	III4	IV1	III5	
vrijdag 24 april 1987	08.15 u	III4	IV1	III6	
vrijdag 24 april 1987	16.45 u	III5	IV1	III6	
zondag 26 april 1987	19.45 u	III6	IV1	III9	
maandag 27 april 1987	08.45 u	III6	IV1	IV1	
dinsdag 28 april 1987	08.15 u	III6	IV1	IV1	
dinsdag 28 april 1987	16.15 u	III6	IV1	IV1	
woensdag 29 april 1987	08.15 u	III6	IV1	IV1	
woensdag 29 april 1987	17.15 u	III6	IV2	IV2	
donderdag 30 april 1987	09.00 u	III6	IV2	IV2	
donderdag 30 april 1987	19.45 u	III6	IV2	IV2	
vrijdag 01 mei 1987	19.30 u	III6	IV2	IV2	

Om deze gegevens in een Excell blad of met de GRM grafisch weer te kunnen geven, moeten we de verschillende stadia numeriek maken. Daarnaast moeten we de tijd tiendelig weergeven. De onderstaande tabel geeft de tijd in minuten en geeft een mogelijke numerieke waarde aan elk stadium. We beschouwen hierbij de gegevens van 20°C.

Tijd in minuten	Stadium	Numeriek Stadium
0	II13	1
3120	III6	2
4065	III7	3
4605	III7	3
5310	III8	4
5700	III8	4
5985	III9	5
6735	III9	5
7275	III10	6
8310	IV1	7
8550	IV1	7
9510	IV1	7
10020	IV1	7
13080	IV1	7
14460	IV1	7
15270	IV1	7
15750	IV1	7
16710	IV1	7
17250	IV2	8
18195	IV2	8
18840	IV2	8
20265	IV2	8

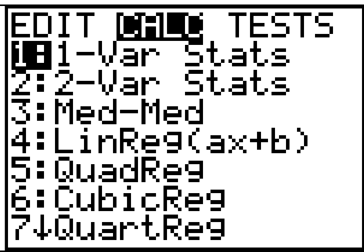
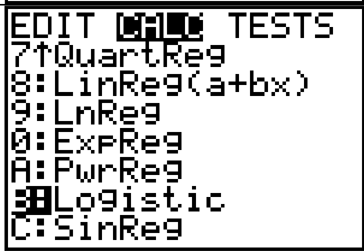
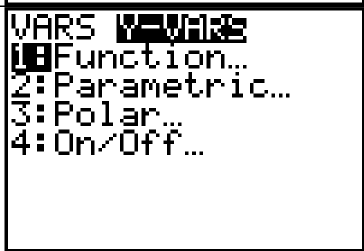
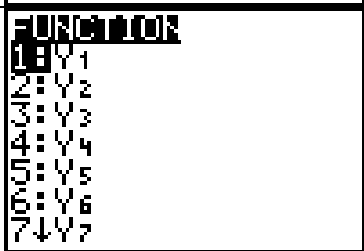
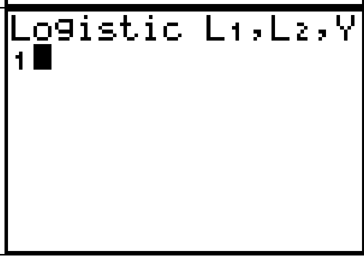
Periode I geeft de segmentatie aan (I1 tot I8), periode II geeft de gastrulatie en neurulatie aan (II1 tot II13), periode III geeft de groeiperiode en de organogenese aan (III1 tot III10). Tijdens periode IV gebeurt de metamorfose (IV1 tot IV17). We zouden evengoed elk stadium numeriek kunnen vertalen en zo 48 stadia erkennen. De numerieke waarden in de bovenstaande tabel zouden dan lopen van 21 tot 33.

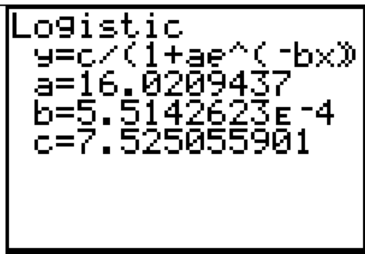
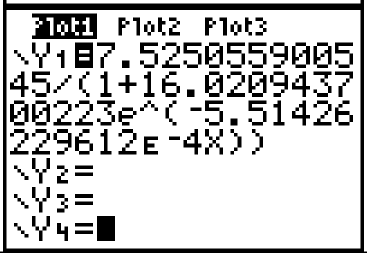
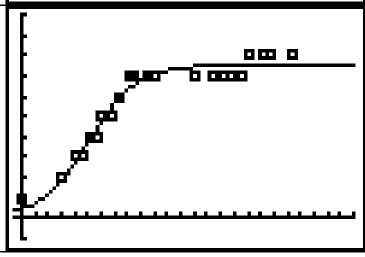
Wanneer we de gegevens uit de tabel invoeren in een werkblad van Excel en hiervan een lijngrafiek laten tekenen, krijgen we de onderstaande grafiek. We vinden een kromme die een S-vormige curve benaderd. We noemen dit een logistische kromme. Heel wat groeiprocessen blijken 'logistisch' te zijn. We gaan hier in het tweede deel uitgebreid op in.



In wat volgt laten we zien hoe we deze kromme kunnen tekenen m.b.v. de grafische rekenmachine. Deze laat ons bovendien toe een functievoorschrift te zoeken dat een goed model levert voor de functie die het stadium waarin de kikker zich bevindt uitdrukt in functie van de tijd in minuten. We overlopen een aantal functies en gaan iets dieper in op *logistische regressie*:

- De gegevens invoeren in de GRM
- De gegevens in een assenstelsel tekenen
- Een wiskundig model vinden: logistische regressie.

<table>
<tr><td>Druk [STAT] en ga via de pijltjestoets naar het [CALC] menu</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ga m.b.v. de pijltjestoetsen naar [B: Logistic] en druk [ENTER]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Druk [2nd L1] en [2nd L2]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Druk [VARS] en beweeg de cursor naar [Y-VARS]</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Kies [1: Function] door op [ENTER] te drukken</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Kies [1: Y1] en druk [ENTER]</td><td>
</td></tr>
</table>

Druk nogmaals `[ENTER]` om de logistische functie te vinden die het meest overeenstemt met de waarden in L_1 en L_2. Deze wordt tevens opgeslagen in de functie Y_1	 
Druk op `[GRAPH]` om de grafiek te zien, tezamen met de waarden	

De logistische functie die bij de gegeven meetwaarden past, heeft dus de volgende vergelijking:

$$y = \frac{7,53}{1+16e^{-0,00055x}}$$

hierbij komt $x = 0$ overeen met vrijdag 17 april 1987.
Eens we dit voorschrift gevonden hebben kunnen we zonder meetwaarden nodig te hebben, vragen oplossen als:

- Bepaal het groeistadium van de kikker op maandag 20 april om 10u.
- Bepaal het groeistadium van de kikker na 5 000 minuten.
- Bepaal wanneer de kikker in stadium 5 is.

De onderstaande tabel geeft de meetwaarden voor een experiment waarbij 30 bevruchte eitjes van Rana temporaria werden uitgezet in water van 10°C, 20°C, 25°C en 30°C . Rana temporaria is de bruine kikker. Ook hier kwamen dezelfde problemen voor met de temperatuur.

Datum	10°C	20°C	25°C	30°C
vrijdag 17 april 1987 15.15 u	III5	III5		III5
zondag 19 april 1987 19.15 u	III6	III9		III10
maandag 20 april 1987 11.00 u	III6	III9		allemaal gestorven
maandag 20 april 1987 20.00 u	III6	III9		III7nieuwe reeks begonnen
dinsdag 21 april 1987 08.15 u	III6	III10		III8
dinsdag 21 april 1987 14.45 u	III6	III10		III8
dinsdag 21 april 1987 19.30 u	III7	IV1		III8
woensdag 22 april 1987 08.00 u	III7	IV1		III10
woensdag 22 april 1987 17.00 u	III8	IV1		
donderdag 23 april 1987 10.15 u	III8	IV2		
donderdag 23 april 1987 6.15 u	III8	IV2	III7	
vrijdag 24 april 1987 08.15 u	III8	IV2	III8	
vrijdag 24 april 1987 16.45 u	III8	IV2	III8	

Zondag 26 april 1987 19.45 u	III8	IV3	IV1	
maandag 27 april 1987 18.45 u	III8	IV3	IV2	
Dinsdag 28 april 1987 08.15 u	III9	IV3	IV2	
Dinsdag 28 april 1987 16.15 u	III9	IV3	IV2	
woensdag 29 april 1987 08.15 u	III9	IV3	IV2	
woensdag 29 april 1987 17.15 u	III9	IV3	IV3	
donderdag 30 april 1987 09.00 u	III10	IV3	IV3	
donderdag 30 april 1987 19.45 u	IV1	IV3	IV3	
vrijdag 01 mei 1987 19.30 u	IV1	IV3	IV3	
Geen waarnemingen: examens				
vrijdag 10 juli 1987 08.30 u	IV13			
Zondag 13 juli 1987 19.45 u	IV13			
maandag 20 juli 1987 10.00 u	IV13			
Dinsdag 21 juli 1987 09.15 u	IV13			
woensdag 22 juli 1987 09.15 u	IV13			
donderdag 23 juli 1987 14.00 u	IV13			
vrijdag 24 juli 1987 18.30 u	IV13			
Zondag 26 juli 1987 21.45 u	IV14			
maandag 27 juli 1987 08.15 u	IV14			
Dinsdag 28 juli 1987 13.15 u	IV15			
woensdag 29 juli 1987 08.15 u	IV16			
donderdag 30 juli 1987 08.30 u	IV17			

De overige meetwaarden uit de eerste tabel en de meetwaarden uit de tabel hierboven kunnen gebruikt worden om leerlingen een analoge afleiding te laten maken als de bovenstaande. De meerwaarde van deze gegevens is dat ze effectief op experimentele basis gevonden werden. Het op zoek gaan naar logistische regressie vormt dan de te bereiken doelstelling. Bij een temperatuur van 30°C lijkt het echter minder interessant om logistische regressie uit te voeren. Er zijn immers weinig meetwaarden. De krommen die horen bij de temperaturen 10°C en 20°C kunnen mooi vergeleken worden omdat we gegevens hebben van hetzelfde startmoment.

Deel 2: Overkoepelende lesideeën

1 Inleiding

De teksten die volgen zijn gebaseerd op de situatie van het wiskunde onderwijs in Vlaanderen. We hopen dat ook Nederlandse leerkrachten hier een bron van inspiratie vinden en de teksten in hun klassen kunnen gebruiken.

In een handboek biologie bestemd voor leerlingen uit het vierde jaar, vonden we de volgende tekst:
In elk van de voorbeelden die we gaven, gaat de groei steeds sneller. We noemen dat een exponentiële groei. Op de wiskundige achtergronden ervan gaan we hier niet dieper in. Om ze helemaal te begrijpen, moet je wat meer afweten van logaritmen en differentialen. Misschien wil je leraar wiskunde er wel wat meer aandacht aan besteden?

Een vraag in een biologieboek aan de leerkracht wiskunde die, althans in onze scholen, nog nooit door de twee vakleerkrachten werd uitgewisseld. Opgeleide biologen die wiskunde geven, hebben op dit terrein een voordeel. Zij kunnen hun kennis gebruiken in de les en hebben althans voor deze twee onderwerpen een uitstekende basis om vakoverschrijdend te werken. Opgeleide wiskundigen die biologie geven, komt niet of nauwelijks voor. Grasduinen in elkaars handboeken ook niet. Feit is dat er heel wat banden tussen wiskunde en biologie in biologiehandboeken te vinden zijn. De lesideeën die je hieronder zal vinden, vinden hun oorsprong in een zoektocht naar deze banden. Heel wat van het materiaal is al verschenen in het tijdschrift Uitwiskeling.

We vertrekken telkens van een onderwerp uit een biologieboek en koppelen hieraan een wiskundig onderwerp. De lesideeën zijn uitgewerkt aan de hand van werkteksten. Deze kunnen in een les gebruikt worden om de leerlingen individueel of in groep te laten werken. Ze kunnen ook door de leerkracht gebruikt worden als leidraad voor de les. De meeste antwoorden op de vragen in de werktekst zijn bijgevoegd, ze staan schuingedrukt en tussen haakjes na de vraag.

2 Populatiedynamiek

Individuen van een dier- of plantensoort die op een bepaalde plaats voorkomen, vormen met elkaar een populatie. In de biologieles komen termen als populatiedichtheid, leeftijdsopbouw van een populatie en de groeicurve van een populatie aan bod. Het rekenwerk nodig voor het begrip populatiedichtheid is eenvoudig en biedt geen extra uitdagingen voor de tweede en derde graad. De bevolkingspiramides die de leeftijdsopbouw van een populatie voorstellen, zijn interessante grafieken om te interpreteren. Dit is een vaardigheid die de leerlingen leerden in de lagere school en de eerste graad. De lessen statistiek uit de tweede graad bieden mogelijkheden om een dergelijke grafiek nog eens onder de aandacht te brengen. De bespreking van de groei van een populatie en de grafiek die deze groei in beeld brengt, biedt een interessante context voor de lessen wiskunde over meetkundige rijen, exponentiële functies en differentiaalvergelijkingen. De context kan tevens gebruikt worden in het onderwerp matrices.

In de biologieles past dit onderwerp in een lessenreeks rond de interacties van organismen. Daartoe krijgen ze eerst informatie over een aantal begrippen zoals een populatie, populatiedichtheid, groeicurve van een populatie. Het is de bedoeling dat dit zelfstandig door de leerlingen ontdekt wordt. In het katholieke net gebeurt dit in het vierde jaar. In het gemeenschapsonderwijs wordt dit bestudeerd in het vijfde jaar.

2.1 Rijen konijnen of populatiedynamiek discreet

In een wiskunde handboek heeft men het over konijnen kweken en de rij van Fibonacci. Dit laatste past binnen een les wiskunde in het hoofdstuk over rijen. In een werkboek biologie vinden we een werktekst over de groei van een populatie konijnen. In een les wiskunde past deze tekst in het hoofdstuk over meetkundige rijen. In het handboek biologie dat in de inleiding al geciteerd werd, komt de exponentiële toename van Turkse tortels aan bod. Het levert weer een context die gebruikt kan worden in een hoofdstuk over meetkundige rijen.

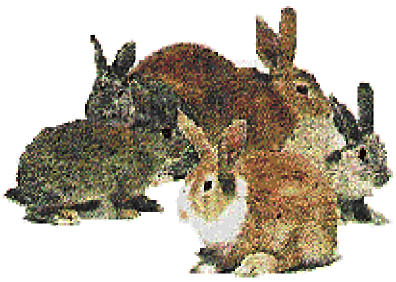
Het onderwerp rijen vind je niet terug in de eindtermen. Het komt nochtans in heel wat leerplannen aan bod. Afhankelijk van de sterkte van de richting vind je het terug in de tweede of derde graad. Opvallend is dat het onderwerp moet aangeboden worden in alle ASO, KSO en TSO richtingen van het vrij onderwijs. Het gemeenschapsonderwijs biedt dit onderwerp enkel aan voor sterke leerlingen van ASO en TSO.

Hoewel de leerlingen moeten geconfronteerd worden met andere soorten rijen, zoals de rij van Fibonacci, gaat de aandacht vooral naar de rekenkundige en meetkundige rij. Deze rijen beschrijven op discrete wijze twee belangrijke groeiprocessen: de lineaire en de exponentiële groei. De groei op een discrete wijze beschrijven wil zeggen dat de tijdstippen die we beschouwen, worden weergegeven door natuurlijke getallen: we tellen het aantal konijnen bij de start, na 1, 2, 3 ... jaar. Wanneer we de groeiprocessen continu beschrijven komen we op het terrein van de functieleer: eerstegraadsfuncties en exponentiële functies. Dit komt in paragraaf 2.2.5 aan bod.

In wat volgt bieden we *vier werkteksten* aan. De meeste vragen worden cursief en tussen haakjes beantwoord. De *eerste* kan gebruikt worden als inleiding tot het hoofdstuk over rijen. Op het einde van de tekst wordt het begrip rij gedefinieerd. De *tweede* is gebaseerd op de bestaande tekst uit het werkboek biologie. Hij past bijgevolg in een biologieles over populatiedynamiek. Hij is echter in een wiskundiger kleedje gestoken en past als dusdanig in een wiskunde les over meetkundige rijen. In de tekst merken we dat de biologische voorwaarde dat de konijnen na 4 jaar sterven niet zo eenvoudig te veralgemenen valt in een model met rijen. Dit zou wel opgelost kunnen worden door een Populatie- of Lesliematrix op te stellen. In een opmerking bij de tweede werktekst schetsen we dit kort. De *derde en vierde* tekst is gebaseerd op de werkteksten uit Uitwiskeling. Delen uit deze werktekst kunnen analoog behandeld worden als de eerste twee werkteksten. De teksten gaan op wiskundig vlak iets verder. De *derde* werktekst behandelt tevens de absolute en relatieve groeisnelheid van de populatie. Er is een hogere graad van abstractie. Als de relatieve groeisnelheid van een exponentieel groeiende populatie groter dan 0 is, dan groeit de populatiegrootte onbegrensd. Dat is natuurlijk niet realistisch. In de *vierde* werktekst stellen we een wiskundig model op dat rekening houdt met deze bedenking. We behandelen discrete logistische groei. We treden hier buiten het leerplan wiskunde, maar benaderen wel de S-curve uit de biologie.

Werktekst 1: De rij van Fibonacci

Leonardo Fibonacci onderzocht (in het jaar 1202) het volgende konijnenprobleem.

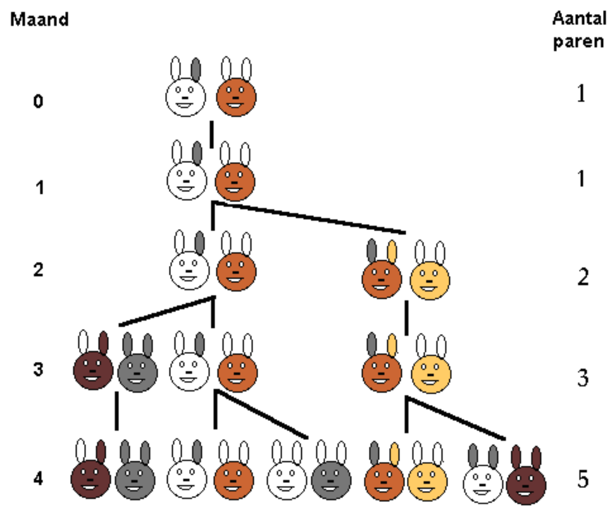


Stel dat een pas geboren konijnenpaar, een vrouwtje en een mannetje, in een veld worden gezet. Konijnen zijn gekend om hun snelle voortplanting wat het spreekwoord ‘kweken als konijnen’ oplevert. Konijnen kunnen succesvol paren als ze één maand oud zijn zodat op het einde van de tweede maand elk vrouwtje een tweede konijnenpaar op de wereld zet. In een goed georganiseerde konijnenkolonie brengt elk konijnenpaar dat oud genoeg is om te paren, elke maand een nieuw konijnenpaar op de wereld. We veronderstellen hierbij dat onze konijnen niet sterven. Fibonacci boog zich over de volgende vraag: Hoeveel konijnenparen zullen er zijn op het einde van één jaar?

§ Op het einde van de *eerste* maand, paren de konijnen, maar is er nog steeds één paar.
§ Op het einde van de *tweede* maand werpt het vrouwtje een nieuw konijnenpaar. Er zijn nu 2 konijnenparen in het veld.
§ Op het einde van de *derde* maand, werpt het originele vrouwtje een tweede paar. Het tweede vrouwtje dat vorige maand geboren werd, is nu oud genoeg om te paren, maar produceert nog geen nakomelingen. Er zijn nu 3 konijnenparen in het veld.

§ Op het einde van de *vierde* maand, werpt het originele vrouwtje weer een paar. Het vrouwtje dat twee maanden geleden geboren is, werpt ook een paar. Er zijn bijgevolg 5 konijnenparen in het veld.

De bovenstaande informatie is voorgesteld in de figuur:



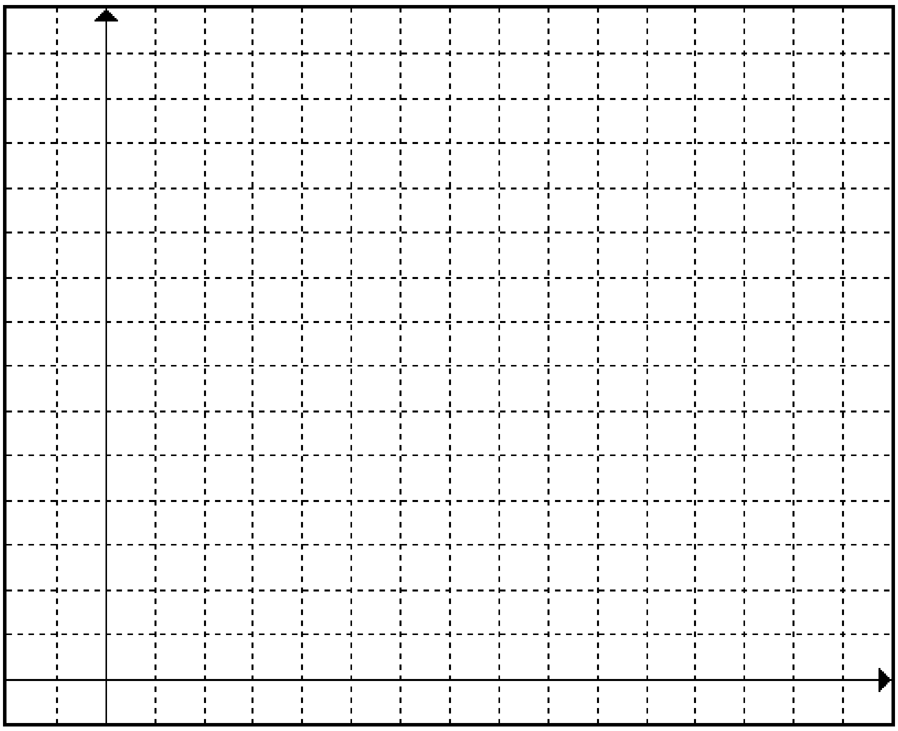
1. Gebruik de figuur om de onderstaande tabel aan te vullen.

Na … maand	0	1	2	3	4	5	6	7
Aantal konijnenparen	1	1	2					

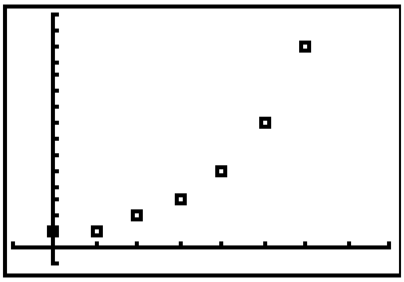
2. Hoeveel paren zullen er zijn in één jaar?

We kunnen deze gegevens ook voorstellen met behulp van een grafiek, we mogen hierbij niet vergeten dat het aantal konijnenparen telkens vermeerdert met sprongen van 1 naar 2 naar 3 naar 5… Er zijn bijvoorbeeld nooit 1,5 of 2,75 konijnenparen. We kunnen bijgevolg geen continue lijn trekken tussen de verschillende punten als we de grafiek tekenen.

3. Gebruik de tabel van vraag 1 en stel de gegevens voor op het onderstaande rooster.



(*De gegevens kunnen als volgt voorgesteld worden:*)



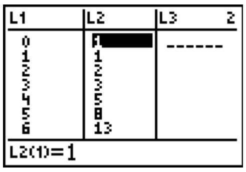
Opmerking: ·
Het konijnenprobleem is niet erg realistisch? In dit probleem mogen blijkbaar broers en zussen paren, wat, genetisch gezien, tot problemen leidt. We kunnen natuurlijk stellen dat elk vrouwtje paart met elk mannetje van een ander paar. Dat elke worp bestaat uit juist twee konijnen en dan nog telkens één vrouwtje en één mannetje is ook niet erg realistisch. Fibonacci deed echter wat wiskundigen vaak doen als zij een moeilijk probleem trachten op te lossen: vereenvoudig het probleem en bestudeer het dan. En… Fibonacci-rijen hebben heel wat interessante en praktische toepassingen.

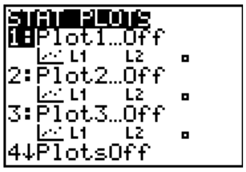
Een *rij* getallen wordt vaak gebruikt om gegevens voor te stellen die in sprongen veranderen. De rij die het aantal konijnenparen voorstelt is de volgende:1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

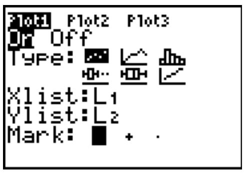
- § Een dergelijke geordende rij getallen noemen we een rij.
- § De getallen in de rij noemen we de termen van de rij.
- § Om een rij voor te stellen worden speciale notaties gebruikt. De eerste, tweede, derde… term van een rij worden weergegeven door u1, u2, u3... (u12 stelt bijgevolg de term voor die op de 12de positie in de rij staat. De drie puntjes (…) op het einde van de rij geven aan dat de rij zich voortzet op dezelfde manier.
- § Een rij wordt altijd volgens een bepaald patroon gevormd. Bij dit voorbeeld is elke term van de rij de som van de vorige twee termen.

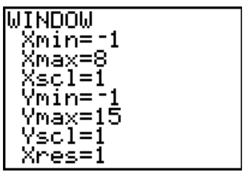
Gebruik van de GRM in deze werktekst:

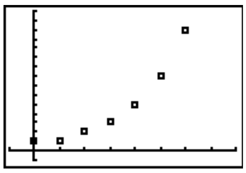
- § De grafiek kan gemaakt worden via `STAT PLOTS`, de tabel moet dan ingevoerd worden in lijsten. De verschillende schermpjes worden hieronder weergegeven:



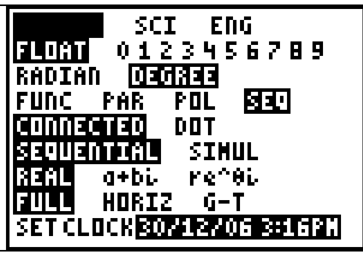
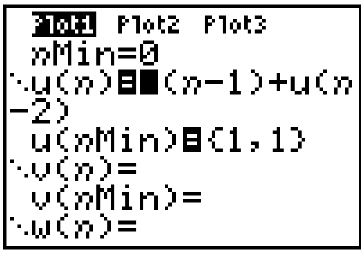
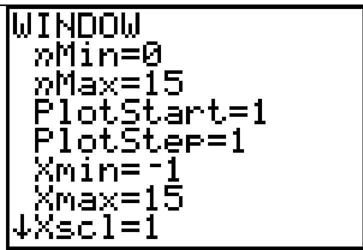
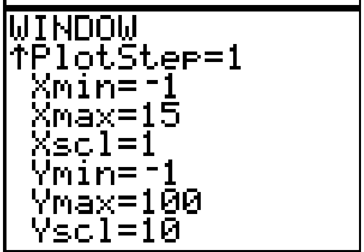
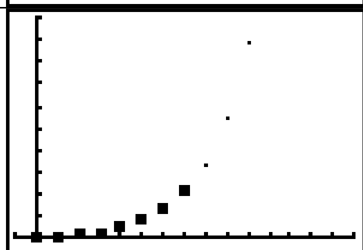
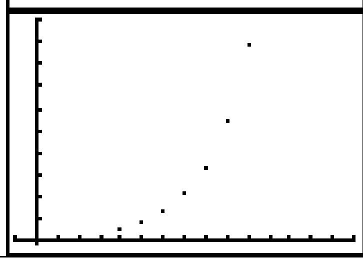








- § In de vorige grafiek worden enkel de waarden geplot die in de tabel voorkomen. Door middel van de ingebouwde functies met rijen kan men de rij volledig oproepen. We doorlopen de methode:

Druk `[MODE]` en kies `[SEQ]`	
Druk `[Y=]` en vul het scherm aan. De termen van de rij worden in de rekenmachine als u(n) genoteerd. De letter u is niet de gewone letter U die je intypt met [ALPHA] [U], maar de speciale kleine letter die je linksboven de toets met het cijfer 7 vindt. De letter n geef je in via de toets [X,T,Á,n]. De instructie u(n)=u(n-1)+u(n-2) laat een term berekenen uit de som van de twee voorgaande termen. De beginvoorwaarde van de Fibonaccirij zijn haar eerste 2 getallen, deze worden in de GRM ingegeven via u(nMin)={1,1}	
Druk `[WINDOW]` en kies goede instellingen voor de assen. Daar de ‘Sequence mode’ aangevinkt is, moeten ook instellingen gekozen worden voor n	
Door `[Graph]` te drukken, krijg je de grafiek van deze rij. Het bovenste schermafdrukje geeft de grafiek verkregen volgens de eerste en tweede procedure. De vierkantjes geven de waarden uit de tabel, de puntjes geven de hele rij. De onderste schermafdruk geeft de grafiek als `[Plot 1]` terug op `[Off]` wordt gezet.	

Werktekst 2: Populatiedynamiek

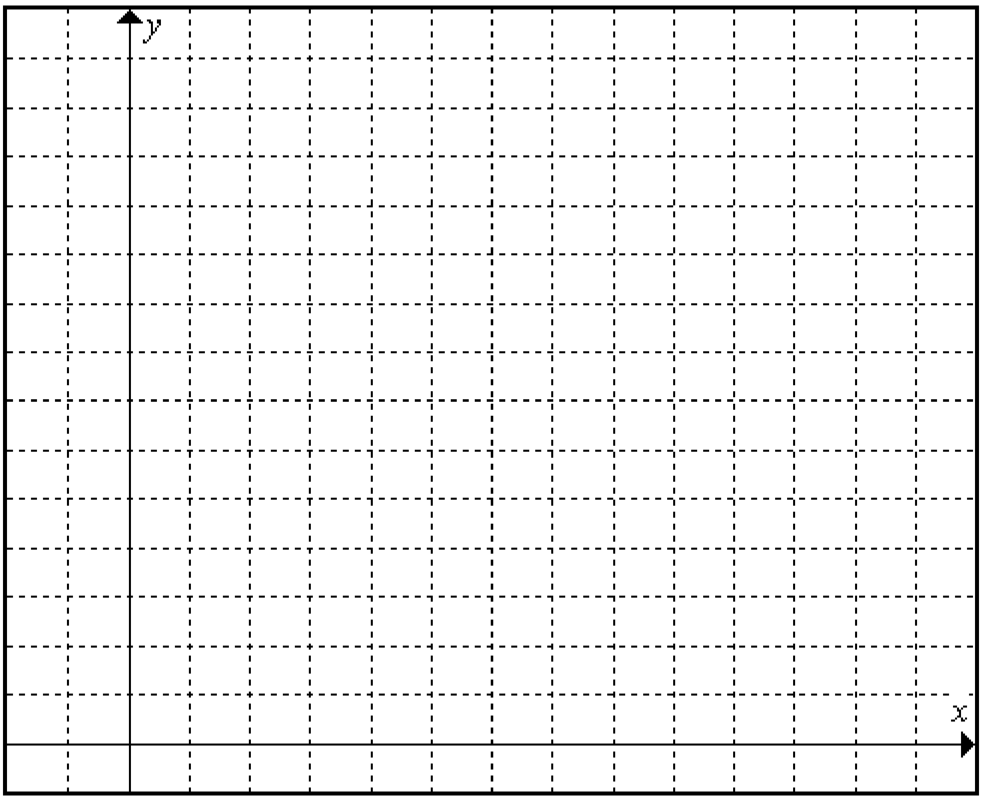
Een paar konijnen heeft gemiddeld acht nesten per jaar, met zes jongen per nest. Konijnen leven gemiddeld vier jaar. Stel je voor dat één paar konijnen wordt uitgezet en dat de natuurlijke vijanden ontbreken, dat konijnen één jaar oud moeten zijn om jongen te krijgen en dat er evenveel mannetjes als wijfjes geboren worden.

1. Bereken het aantal konijnen na 1, 2, 3, 4 en 5 jaar en vul de tabel aan.

Na … jaar		1	2	3	4	5
Samenstelling van de populatie	1 jarigen	2	48			
	2 jarigen	0	2			
	3 jarigen	0	0			
	4 jarigen	0	0			
	5 jarigen	0	0			
Totaal aantal konijnen		2	50			

(*na 3 jaar zijn er 1200 1-jarigen omdat 50 konijnen 25 paren vormen. Deze 25 paren hebben 8 nesten van 6 jongen. Er zijn 48 2- jarigen, 2 3-jarigen en geen 4–jarigen. In totaal zijn er dan 1250 konijnen. Na 4 jaar zijn er 30 000 1-jarigen (625 paren x 48 konijnen), 1 200 2-jarigen, 48 3-jarigen en 2 4-jarigen. Er zijn dan 31 250 konijnen. Na 5 jaar zijn er 750 000 1-jarigen, 30 000 2-jarigen, 1 200 3-jarigen en 48 4-jarigen. Er zijn bijgevolg 781 248 konijnen. Deze oplossing die ook in het biologie werkboek op deze manier voorkomt, gaat rekbaar om met het begrip tijd. De acht nesten worden niet op hetzelfde moment geproduceerd waardoor de jongen niet allemaal op dezelfde moment 1 jaar zijn… We kunnen dus beter spreken van 'in hun eerste levensjaar', …*)

2. Zet deze gegevens uit op het onderstaande rooster.



3. Wat zal er met de populatie zonder natuurlijke vijanden na enkele jaren kunnen gebeuren?

(De populatie wordt enorm groot. Dit kan niet oneindig blijven doorgaan. Meestal zwakt de curve na een aanvankelijk snelle groei af en schommelt verder om een stabiele waarde. Een dergelijke curve van een populatie in evenwicht wordt een S-curve genoemd.)

We gaan er nu van uit dat er wel natuurlijke vijanden zijn en er slechts twee jongen per jaar overleven.

4. Bereken het aantal konijnen na 1, 2, 3, 4 en 5 jaar en vul de tabel aan.

Na … jaar		1	2	3	4	5
Samenstelling van de populatie	1 jarigen	2	2			
	2 jarigen	0	2			
	3 jarigen	0	0			
	4 jarigen	0	0			
	5 jarigen	0	0			
Totaal aantal konijnen		2	4			

(Na 3 jaar zijn er 4 1-jarigen (4 konijnen vormen 2 koppels die elk 2 jongen produceren), 2 2-jarigen, en 2 3-jarigen. Dit vormt een totaal van 8 konijnen. Na 4 jaar zijn er 8 1-jarigen, 4 2-jarigen, 2 3-jarigen en 2 4-jarigen, wat een totaal van 16 konijnen vormt. Na 5 jaar zijn er 16 1-jarigen, 8 2-jarigen, 4 3-jarigen en 2 4-jarigen, wat een totaal maakt van 30 konijnen)

5. Zet deze gegevens uit op het rooster onder vraag 2 maar gebruik een andere kleur.

6. Beschrijf de invloed van natuurlijke vijanden op de populatie.

   (Natuurlijke vijanden remmen de groei af. In dit voorbeeld is er echter nog steeds een exponentiële toename maar het gebeurt veel trager.)

7. Welke andere factoren kunnen de populatie laag houden?

   (Ziekte, weersomstandigheden, voedseltekort, …)

8. Hoeveel jongen overleven per paar als je weet dat de populatie stabiel blijft?

   (Er moeten dan evenveel jongen overleven als er volwassenen sterven.)

In wat volgt gaan we de rij getallen in elke situatie analyseren en veralgemenen. In het bovenstaande sterven de konijnen na 4 jaar. Dit is niet eenvoudig te veralgemenen m.b.v. de leerstof van rijen. Om een eenvoudig wiskundig model op te stellen zouden we ervoor kunnen kiezen om de konijnen niet te laten sterven of om de konijnen kort na hun productie van 8 nesten te laten sterven. De tweede veronderstelling is iets realistischer. We veronderstellen dus dat de konijnen eerst 1 jaar worden vervolgens produceren en in hun tweede levensjaar sterven. We tellen de konijnen telkens op het einde van het jaar nadat de vorige generatie gestorven is en voor de productie van de volgende generatie.

We beschouwen eerst de situatie waarbij er geen natuurlijke vijanden zijn (geen predatordruk).

9. Geef het aantal konijnen na 1, 2, 3, 4 en 5 jaar rekening houdend met de veronderstelling dat elk konijnenpaar sterft nadat ze 8 nesten van 6 konijnen geproduceerd heeft. En dat we tellen nadat de ouderparen gestorven zijn en dus op het einde van het jaar dat ze gestorven zijn.

(Na 1 jaar zijn er 2 konijnen, na 2 jaar hebben deze 2 konijnen die 1 paar vormen 8 nesten van 6 konijnen geproduceerd en zijn ze gestorven. Er zijn bijgevolg 48 konijnen. Na 3 jaar hebben deze 24 paren elk 8 nesten van 6 konijnen geproduceerd en zijn ze gestorven. Er zijn bijgevolg 24.48=1 152 konijnen. Na 4 jaar zijn er 576.48=27 648 konijnen, enz…)

10. Vul de onderstaande tabel aan. Verklaar eerst de berekeningen die reeds werden uitgevoerd.

Na … jaar	Aantal konijnen
1	2
2	$u_2 = \frac{2}{2}\cdot 48 = 48$ $u_2 = \frac{u_1}{2}\cdot 48 = u_1 \cdot 24$
3	$u_3 = \frac{48}{2}\cdot 48 = 1152$ $u_3 = \frac{u_2}{2}\cdot 48 = u_2 \cdot 24$
4	
5	

(We delen telkens het totale aantal konijnen van het vorige jaar door 2 om het aantal konijnenparen te vinden. Elk paar produceert 8 nesten van 6 konijnen en bijgevolg dus 48 konijnen. Dit resultaat kan men ook bekomen door het aantal konijnen van het vorige jaar te vermenigvuldigen met 24. Na 4 jaar is het totale aantal konijnen dus u_3 . 24. Na 5 jaar is het aantal konijnen u_4.24 enz…)

11. Het totaal aantal konijnen is een rij. Geef het soort rij en het recursieve en expliciete voorschrift van deze rij.

(Het is een meetkundige rij met recursief voorschrift $u_n = u_{n-1}\cdot 24$ *waarbij* $u_1 = 2$ *en expliciet voorschrift:* $u_n = 2\cdot 24^{n-1}$*)*

12. Bepaal s_7. Geef (zo deze er is) de betekenis van deze som in de gegeven context.

($s_7 = u_1\dfrac{q^7-1}{q-1} = 2\dfrac{24^7-1}{24-1} = 398823602$. *De som heeft hier geen zinnige betekenis. Of toch? Het is het totale aantal konijnen dat geboren werd op 7 jaar tijd, het koppel konijnen dat gedurende het eerste jaar werd uitgezet inbegrepen.* s_7-2 *is het totaal aantal nakomelingen uit het eerste paar gedurende 6 jaar)*

13. De derde vraag peilt naar de evolutie van de populatie na enkele jaren. Een wiskundig instrument om de evolutie van een rij na te gaan op lange termijn, is het bepalen van de limiet. Bepaal de limiet van de rij.

($\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\cdot 24^{n-1} = 2\lim\limits_{x\to+\infty} 24^{n-1} = +\infty$)

14. Los de vragen 9 tot en met 12 op voor de situatie waarbij we veronderstellen dat de konijnen wel natuurlijke vijanden hebben.

(We hebben weer te maken met een meetkundige rij. Het recursief voorschrift is $u_n = u_{n-1} \cdot 2$ *waarbij* $u_1 = 2$ *en het expliciet voorschrift is:* $u_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.
$s_7 = u_1 \dfrac{q^7 - 1}{q-1} = 2\dfrac{2^7-1}{2-1} = 254$ *met een analoge betekenis. Tenslotte is* $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^n = +\infty$. *Het aantal konijnen blijft dus naar oneindig gaan, zij het minder snel)*

Opmerking bij werktekst 2: Populatiematrices of Lesliematrices

P.H. Leslie was een Engels bioloog die in 1945 een model introduceerde dat het mogelijk maakte voorspellingen te doen over de samenstelling van populaties. Een Lesliematrix beschrijft de overgang van de ene generatie op de andere. De Lesliematrix die we kunnen opstellen bij het bovenstaande konijnenprobleem is de volgende:

$$\begin{array}{cc} \textit{van} & \\ \begin{array}{cccc} 1j & 2j & 3j & 4j \end{array} & \\ A = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1j \\ 2j \\ 3j \\ 4j \end{array} \textit{naar} \end{array}$$

De eerste rij betekent dat elk koppel 1-jarige, 2-jarige, 3-jarige en 4-jarige konijnen 24 paren konijnen produceren. De tweede rij betekent dat de 0-jarigen allemaal 1 jaar worden en dus starten aan hun 2^de^ levensjaar (en vervolgens produceren en sterven). Zo ook geven de derde en vierde rij aan dat 2-jarigen en 3-jarigen overleven. De 4-jarigen gaan dood.

De huidige populatie konijnen kunnen we ook weergeven in de vorm van een matrix:

$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1j \\ 2j \\ 3j \\ 4j \end{array}$$

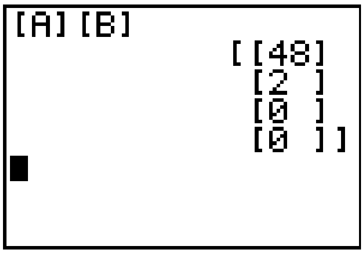
Wanneer we nu het product van deze twee matrices nemen, krijgen we de samenstelling van de populatie gedurende het volgende jaar:

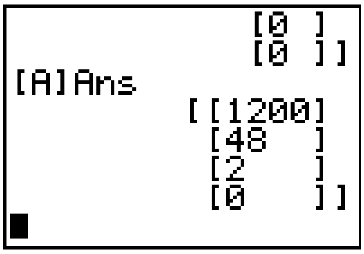
$$A.P = \begin{bmatrix} 48 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1j \\ 2j \\ 3j \\ 4j \end{array}$$

Om de samenstelling van de populatie na het derde jaar te kennen, nemen we weer het volgende product:

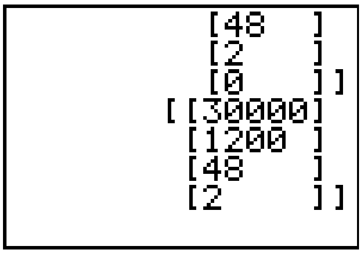
$$\begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1200 \\ 48 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1j \\ 2j \\ 3j \\ 4j \end{array}$$

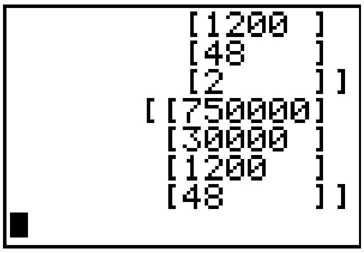
Met de GRM kan men deze opeenvolgende samenstelling snel berekenen door achtereenvolgende producten te maken van de matrix A met het antwoord van het vorige product. De matrices bouw je en roep je op door `[2nd MATRIX]` te gebruiken. We nemen hier de opeenvolgende schermpjes van de GRM op:

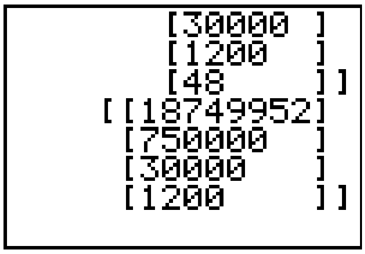




De volgende schermpjes krijg je door telkens op `[ENTER]` te drukken. Het laatste scherm geeft de samenstelling van de populatie na 6 jaar weer.







Werktekst 3: Duiven die kweken als konijnen

In België komen een aantal duivensoorten voor. De *stadsduif* wordt overal in de grote steden aangetroffen en voor vele mensen is dit 'de duif'. Maar een duif als *de Turkse tortel* komt nu heel veel voor in Europa. Ze komt oorspronkelijk uit China en is via de Balkan West-Europa binnengetrokken. In de jaren 1950 werden er door vogelliefhebbers speciale bustochten ondernomen om deze duif in onze streek te bezichtigen omdat ze zo'n zeldzaamheid was. In ons land nam hun aantal tussen 1950 en 1970 heel sterk toe. Ondertussen heeft het aantal zich gestabiliseerd. Vroeg in de herfst zijn er zwermen van deze vogels te vinden op gemaaide korenvelden en boerderijen waar graan wordt verwerkt. Men kan iedere maand van het jaar broedende paartjes aantreffen en dit gebeurt zelden verder dan 1 km van menselijke activiteit.

In deze werktekst bestuderen we een wiskundig model voor de groei van een populatie tortelduiven in een bepaald gebied. We houden alleen rekening met de vrouwtjes. Populaties worden door biologen immers behandeld als vrouwtjes die vrouwelijke jongen baren!

We willen het wiskundige model aanvankelijk heel eenvoudig houden. Daarom maken we de volgende veronderstellingen:

- we starten met een populatie van 1000 vrouwelijke tortelduiven;
- elk vrouwtje krijgt na 1 jaar gemiddeld 1,5 vrouwelijk jong;
- kort daarna sterft het vrouwtje;
- er is geen immigratie of emigratie van duiven.

1. Bepaal het aantal tortelduiven na 1, 2, 3 en 4 jaar.

(Na 1 *jaar krijgen de* 1000 *vrouwtjes* 1500 *jongen. Daarna sterven ze zelf zodat alleen de* 1500 *jongen overblijven. Op dezelfde manier vind je het aantal na* 2, 3 *en* 4 *jaar:* 2250, 3375, 5063 *(afgerond))*

2. Geef een recursievergelijking en beginvoorwaarde voor de grootte van de populatie tortelduiven, waarbij je het aantal tortelduiven na n jaar voorstelt door y_n. Geef ook een expliciet voorschrift voor y_n.

   (De recursievergelijking en de beginvoorwaarde zijn $y_{n+1} = 1{,}5 y_n$ *en* $y_0 = 1000$. *Het expliciete voorschrift is* $y_n = 1000 \cdot 1{,}5^n$.*)*

3. Met welk soort groei hebben we hier te maken? En van welk type is de rij die de evolutie van het aantal tortelduiven beschrijft?

   (Met exponentiële groei, zij het in een discrete versie: de tijd neemt alleen gehele waarden aan en het aantal vrouwtjes groeit volgens een meetkundige rij. De groeifactor van het exponentiële groeiproces is 1,5. *Dit is tevens het quotiënt van de meetkundige rij.)*

4. Bepaal de jaarlijkse toename van de populatie tortelduiven na 1 jaar, na 2 jaar en na 3 jaar.

   (De populatie neemt achtereenvolgens toe met 500, 750, 1125)

De jaarlijkse toename, gegeven door $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, zullen we de *(absolute) groeisnelheid* noemen. Dit getal geeft immers weer hoe snel de populatie tortelduiven in het betrokken jaar gegroeid is.

5. Verbind de notatie uit de linkerkolom met het juiste getal uit de rechterkolom.

Δy_0	1680
Δy_1	500
Δy_2	1125
Δy_3	750

De *relatieve* groeisnelheid is de verhouding van de groeisnelheid tot de populatiegrootte. De relatieve groeisnelheid is dus gegeven door $\dfrac{\Delta y_n}{y_n}$.

6. Bepaal de relatieve groeisnelheid van de populatie tortelduiven. Bepaal dus $\dfrac{\Delta y_n}{y_n}$ voor $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$.

   (De relatieve groeisnelheid is constant en bedraagt 0,5.)

7. In vraag 6 is je wellicht opgevallen dat de relatieve groeisnelheid constant is. Wat betekent dit? Is ook de absolute groeisnelheid constant?

   (De relatieve groeisnelheid is constant 0,5: elk jaar komt er 50% van het aantal duiven dat er al was bij. De absolute groeisnelheid is niet constant, maar neemt achtereenvolgens toe met 500, 750, 1125, ... individuen per jaar. In die zin groeit de populatie dus elk jaar sneller. De absolute groeisnelheid wordt m.a.w. steeds groter.)

We veronderstellen nu dat we met b vrouwtjes starten en dat elk vrouwtje na 1 jaar voor g vrouwelijke nakomelingen zorgt en daarna sterft.

8. Geef een recursievergelijking en beginvoorwaarde voor het aantal vrouwtjes y_n na n jaar. Geef ook een expliciet voorschrift.

(De recursievergelijking is $y_n = g \cdot y_{n-1}$ *en de beginvoorwaarde is* $y_0 = b$*. Het expliciete voorschrift is* $y_n = b \cdot g^n$*.)*

9. Druk de relatieve groeisnelheid *r* uit in functie van *g* en beschrijf de mogelijkheden (stijgen, dalen, versneld stijgen, ...) voor de evolutie van het aantal vrouwtjes. Maak een onderscheid naargelang van de waarde van *g* (of *r*).

   (De relatieve groeisnelheid is constant en wordt gegeven door $r = g - 1$*. Het aantal vrouwtjes neemt dus met* $100 \cdot (g-1)$ *procent toe. Voor de evolutie van het aantal vrouwtjes hebben we de volgende mogelijkheden:*

   - *Als* $g > 1$ *(*$r > 0$*), dan stijgt het aantal vrouwtjes versneld: de aantallen worden groter en groter en de verschillen tussen opeenvolgende aantallen worden ook steeds groter.*
   - *Als* $g < 1$ *(*$r < 0$*), dan daalt het aantal vrouwtjes vertraagd: de aantallen worden kleiner en kleiner en de verschillen tussen opeenvolgende aantallen worden (in absolute waarde) ook steeds kleiner.*
   - *Als* $g = 1$ *(*$r = 0$*), dan is het aantal vrouwtjes constant.)*

Werktekst 4: Grenzen aan de groei van de populatie tortelduiven

In werktekst 3 zijn we er van uitgegaan dat het aantal nakomelingen per vrouwtje en bijgevolg ook de relatieve groeisnelheid constant zijn. In werkelijkheid is dat niet zo: wanneer er in een bepaald gebied al veel tortelduiven zijn, groeit de populatie in verhouding niet meer zo snel aan.

1. Hoe zou dat komen?

   (Hoe groter de populatie is, hoe moeilijker het wordt om voldoende voedsel, nestplaatsen ... te vinden, een besmettelijke ziekte kan de groei afremmen (bv. myxomatose bij de konijnen, biotische factoren: invoeren van fretten in Australië remde een konijnenplaag af, menselijk ingrijpen: bv. pil bij duiven ....)

We zullen nu uitgaan van het volgende verband tussen de relatieve groeisnelheid en de grootte van de populatie.

Populatiegrootte	relatieve groeisnelheid
1000	0,5
1250	0,49
1500	0,48
1750	0,47
...	...

De tabel suggereert dat het verband tussen de groeisnelheid en de populatiegrootte beschreven wordt door een eerstegraadsfunctie.

2. Geef de vergelijking van deze eerstegraadsfunctie en maak een grafiek van het verband tussen de relatieve groeisnelheid (r) en de populatiegrootte (y) (waarbij je de populatiegrootte op de horizontale as uitzet).

   (De rechte gaat door de twee punten $(0{,}5;1000)$ en $(0{,}49;1250)$ *en heeft bijgevolg als vergelijking (zie 2.2.2, we passen hier de formule van de vergelijking van een rechte toe. De verticale as is meestal de y-as, hier wordt hij echter voorgesteld door r, de horizontale as is meestal de x-as, hier wordt hij echter voorgesteld door y*

$r-0{,}5=\frac{0{,}49-0{,}5}{1250-1000}(y-1000)\Leftrightarrow r=0{,}54-0{,}000\,04y$. *De grafiek is een rechte die de verticale as snijdt op hoogte* 0,54 (Stel y = 0) *en die de horizontale as snijdt bij* 13 500(stel r = 0)*).)*

In vraag 1 uit werktekst 3 berekende je dat de populatie na 1 jaar uit 1500 duiven bestaat. Om het aantal duiven na 2, 3 en 4 jaar te vinden, vermenigvuldigde je telkens opnieuw met 1,5.

3. Met welke factor moet je het aantal duiven na 1 jaar nu vermenigvuldigen om het aantal duiven na 2 jaar te kennen? Hoeveel duiven zijn er na 2 jaar?

   (Na 1 *jaar zijn er* 1500 *duiven. In de tabel lezen we af dat de relatieve groeisnelheid dan* 0,48 *is. Dit wil zeggen dat er het tweede jaar* $1500\cdot 0{,}48$ *duiven bijkomen, er zijn dan* $1500+1500\cdot 0{,}48=1500\cdot(1+0{,}48)=1500\cdot 1{,}48$. *We moeten dus vermenigvuldigen met de factor* 1,48. *We vinden dan* $y_2=1500\cdot 1{,}48=2220$.*)*

4. Welke factoren gebruik je om het aantal duiven na 3 en na 4 jaar te kennen? En hoeveel duiven zijn er na 3 en 4 jaar?

   (De relatieve groeisnelheid die we moeten gebruiken om het aantal na 3 *jaar te vinden, vinden we niet rechtstreeks in de tabel. Daarvoor gebruiken we de vergelijking die r uitdrukt in functie van y. Dit geeft* $r=0{,}54-0{,}000\,04\cdot 2220=0{,}4512$. *De factor is dus* 1,4512. *Zo vinden we* $y_3=2220\cdot 1{,}4512=3221{,}664\approx 3222$. *Voor het aantal duiven na* 4 *jaar vermenigvuldigen we het aantal duiven na* 3 *jaar met* 1,4111... *en vinden we* $y_4=4546{,}1978...\approx 4546$.*)*

5. Vergelijk de populatiegrootte na 1, 2, 3 en 4 jaar met de aantallen die je in de vorige werktekst vond.

   (De waarden die we nu berekenden, zijn allemaal kleiner dan bij exponentiële groei. Dat komt doordat de factoren waarmee we vermenigvuldigen nu kleiner zijn.)

6. Bij welke populatiegrootte is de relatieve groeisnelheid 0? Hoe evolueert een populatie die exact zo groot is?

   (Als de populatie uit 13 500 *duiven bestaat, is de relatieve groeisnelheid* 0 *en verandert het aantal duiven dus niet. Elke duif zorgt in dat geval voor één nakomeling. De populatie is dan in evenwicht.)*

7. Wat gebeurt er als het aantal duiven groter is dan het aantal dat je in de vorige vraag vond?

   (Dan neemt het aantal duiven af want dan is de relatieve groeisnelheid $r<0$.*)*

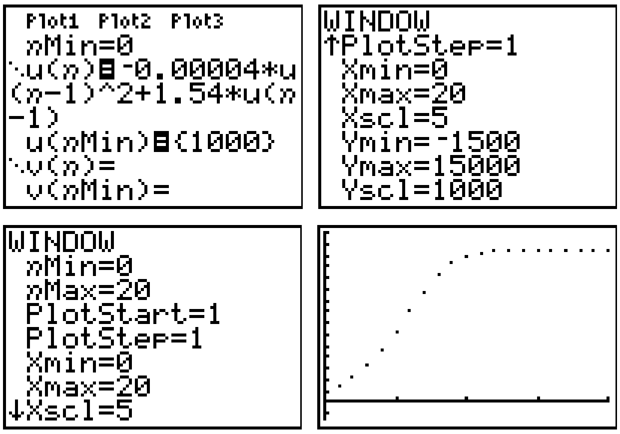
8. Gebruik de definitie van relatieve groeisnelheid en de vergelijking $r=0{,}54-0{,}000\,04y$ uit vraag 2 van deze werktekst om y_{n+1} uit te drukken in functie van y_n.

   (Uit $\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n}=r=0{,}54-0{,}000\,04y_n$ *volgt dat* $y_{n+1}=-0{,}000\,04y_n^2+1{,}54y_n$.*)*

9. Voer de recursievergelijking en beginwaarde in je rekenmachine in en teken de grafiek van het aantal duiven in functie van de tijd.

   (Zorg dat je rekenmachine ingesteld is om de grafiek van een rij i.p.v. een gewone functie te tekenen. Dat doe je door ze in de SEQ-modus te plaatsen via `[MODE]`. *De termen van de rij worden in de rekenmachine als* `u(n)` *genoteerd i.p.v.* y_n. *De letter* `u` *is niet de gewone letter* `U` *die je intypt met* `[ALPHA] [U]`, *maar de speciale kleine letter die je linksboven de toets met het cijfer 7 vindt. De letter* `n` *geef je in via de toets* `[X,T,θ,n]`. *Geef nu via het* `Y=`*-scherm de recursieve vergelijking en de beginwaarde in en stel het*

tekenvenster in (zie de eerste drie schermafdrukken hieronder). Laat tot slot de grafiek tekenen via [GRAPH]*.)*



10. Beschrijf het verloop (stijgen, dalen, versneld stijgen ...) van deze grafiek.

(In het begin neemt het aantal duiven versneld toe. Je kan dit aan de grafiek zien: het hoogteverschil tussen twee opeenvolgende puntjes wordt in het begin steeds groter. Na deze beginfase blijft het aantal duiven toenemen, maar trager en trager. Ten slotte stabiliseert het aantal duiven, wat resulteert in een horizontale asymptoot op hoogte 13 500*. We hebben hier dus te maken met 'groei met grenzen'. Je herkent de S-curve uit de biologie.)*

11. Geef een biologische verklaring voor het verloop dat je in de vorige vraag vastgesteld hebt.

(Het eerste deel van de grafiek heeft de vorm van een J-curve, als we de puntjes verbinden krijgt de grafiek de vorm van een J, zoals ook in werktekst 1, 2 en 3. Populaties die in een grafiek een J-curve vertonen komen meestal tot stand omdat de mens dieren of planten in een vreemd milieu brengt waar zij niet bedreigd worden door natuurlijke vijanden. Zo zijn de konijnen in Australië ingevoerd voor de jacht. De konijnenplaag die daar op volgde werd vervolgens tijdelijk afgeremd door het invoeren van fretten. De fretten eten immers een aantal konijnen op. De grafiek vertoont bijgevolg een vertraagde stijging. Het aantal konijnen neemt nog toe maar niet meer zo snel.)

12. Geef een wiskundige verklaring voor het verloop dat je in de vorige vraag vastgesteld hebt.

(We geven eerst een verklaring voor wat we in de laatste fase vastgesteld hebben. In vraag 6 *hebben we gezien dat de groeisnelheid* 0 *is als de populatie exact uit* 13 500 *individuen bestaat. Als het aantal duiven* ongeveer *gelijk is aan* 13 500*, dan is de relatieve groeisnelheid* ongeveer *gelijk aan* 0*. Dat verklaart waarom het aantal duiven in deze fase nauwelijks nog verandert.*

We hebben in vraag 10 *vastgesteld dat het aantal duiven eerst* versneld *en daarna* vertraagd *stijgt. Dat kunnen we verklaren aan de hand van de volgende formule voor de absolute groeisnelheid:*

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = (0{,}54 - 0{,}000\,04\,y_n)\cdot y_n\,.$$

De absolute groeisnelheid wordt door twee factoren bepaald. Als y_n *groter wordt, wordt de eerste factor kleiner en de tweede factor (uiteraard) groter. In het begin, wanneer* y_n *nog relatief klein is, weegt de toename van de tweede factor veel sterker door dan de afname van de eerste factor. Daardoor wordt de absolute groeisnelheid aanvankelijk groter. De populatiegrootte stijgt dan versneld. Naderhand wordt de afname van de* *eerste factor belangrijker dan de toename van de tweede factor. In deze fase wordt de absolute groeisnelheid dus terug kleiner en stijgt de populatiegrootte vertraagd.)*

13. Een jonge onderzoeker begint de populatie pas te bestuderen wanneer ze uit 8 000 duiven bestaat en tekent de grafiek van de evolutie van de populatie. Beschrijf zijn grafiek.

    (De versneld stijgende fase in het groeiproces is reeds achter de rug wanneer de onderzoeker aankomt. Hij ziet in zijn grafiek dus enkel de vertraagd stijgende fase.)

Het groeiproces dat we in deze werktekst bestudeerd hebben, is een voorbeeld van *logistische groei*. Dit groeimodel is voor het eerst gebruikt door de Belgische wiskundige Pierre-François Verhulst in de jaren 1830 en 1840 om de groei van de Belgische en de Franse bevolking te beschrijven. Het wordt nu gebruikt om de groei van populaties bacteriën in laboratoria te beschrijven. Het is niet erg duidelijk waar de benaming ‘logistisch’ vandaan komt. Wellicht verwijst het naar de ‘praktische rekenkunde’, die dan in tegenstelling staat tot theoretische overwegingen. Verhulst baseerde zijn logistische model immers op statistische gegevens over de Belgische en Franse bevolking.

In vraag 6 hebben de leerlingen berekend dat de populatie in evenwicht is als ze uit 13 500 duiven bestaat. Verderop kwam het getal 13 500 nogmaals voor, als limietwaarde van de populatie die met 1000 duiven gestart was. Deze evenwichts- en limietwaarde is de *draagkracht* van de omgeving. Het is het maximale aantal individuen dat de omgeving op een duurzame manier kan herbergen.

In vraag 8 hebben we de leerlingen een *recursief* voorschrift laten opstellen voor het aantal vrouwtjes y_n na n jaar. Het is echter niet mogelijk om een *expliciet* voorschrift te geven voor y_n!

2.2 De J-curve, de S-curve en de sinusoïde of populatiedynamiek continu

Ook in deze paragraaf bestuderen we een wiskundig model voor de groei van een populatie. We zullen de tijd nu echter voorstellen door de letter t om aan te geven dat we deze variabele opvatten als een *continue* variabele. Dat betekent dat t alle (positieve) waarden kan aannemen. In paragraaf 2.2.5.1 was dat niet het geval. Toen nam de tijd (toen voorgesteld door n) alleen *natuurlijke getallen* als waarde aan en daarom was de tijd een discrete variabele. Bemerk dat we het woord continu hier anders gebruiken dan in de analyse. We hebben het over een continue *variabele*, niet over een continue *functie*.

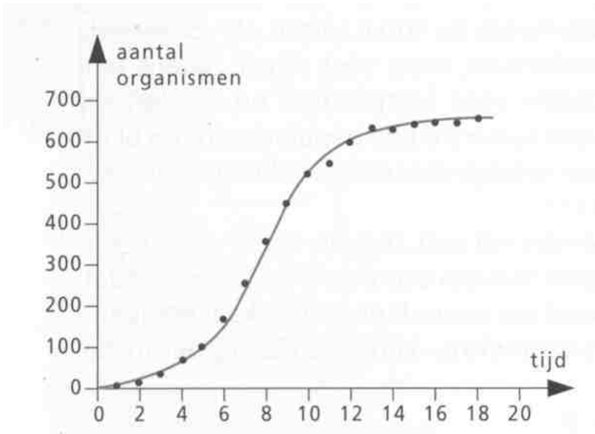
Er is een goede reden om de tijd op te vatten als een continue variabele. We willen immers rekening houden met het feit dat er niet één keer per jaar nakomelingen bijkomen of individuen sterven, maar dat dit eigenlijk voortdurend (= continu!) gebeurt.

In het discrete geval beschreven we de evolutie van de populatiegrootte aan de hand van een rij y_n. Nu gebruiken we een ‘gewone’ functie $y(t)$.

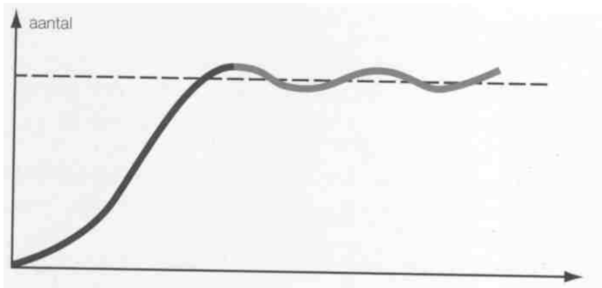
Voor de teksten vonden we onze inspiratie in twee handboeken biologie.

In Bioskoop 4 lezen we:

Alle populaties hebben de neiging om exponentieel in aantal toe te nemen. Af en toe merk je dat ook echt. Bij de kolonisatie van een vijver door wieren bijvoorbeeld. Ook het aantal Turkse tortels in ons land nam tussen 1950 en 1970 exponentieel toe. […] Het aantal Turkse tortels heeft zich gestabiliseerd. Die evolutie vind je in grafiek figuur 3.3.’



In Macro/micro in de biologie 4 lezen we:
'Bij bacteriën vindt de voortplanting meestal ongeslachtelijk plaats doordat één bacterie zich in tweeën deelt. Dat gebeurt in gunstige omstandigheden bijna om de 20 minuten. Als je die gegevens uitzet in een grafiek, geeft de figuur je een idee van de bevolkingsexplosie die één enkel bacterie kan veroorzaken. Vanwege de vorm noemt men zo'n groeicurve een J-curve. […] Meestal zwakt de curve na een aanvankelijk snelle groei af en schommelt verder om een stabiele waarde. Zo'n curve van een populatie in evenwicht wordt een S-curve genoemd. […] De muizen- en uilenpopulatie in een gebied schommelt voortdurend om een gemiddelde waarde. Beide populaties houden elkaar in evenwicht.'



De kolonisatie van een vijver door wieren wordt in verschillende handboeken wiskunde gebruikt om het verschil tussen lineaire en exponentiële groei in te leiden.

De eerste werktekst is gebaseerd op een tekst uit 'enkele inleidende modules vir Graad 12 Wiskunde'. In deze tekst worden zowel de exponentiële als de logaritmische functie ingeleid vertrekkend vanuit het voorbeeld van de snelgroeiende waterhyacint. We bestuderen de oppervlakte die deze plant bedekt. De gebruikelijke notatie voor oppervlakte is A(rea). De notatie die we de functie in deze tekst gebruiken is $A(t)$ i.p.v. $y(t)$.

De tweede werktekst is gebaseerd op een werktekst uit 'Wiskunde van uit toepassing'. De handboeken Delta en Van Basis tot limiet gebruiken dit thema om exponentiële functies in te leiden vanuit het verschil tussen lineaire en exponentiële groei. We bestuderen de oppervlakte van een meer en de bedekking van dat meer door algen. De oppervlakten noteren we met $f(t)$ en $g(t)$, de meer gebruikelijke notaties binnen wiskunde om de twee functies te noteren.

Bacteriën leveren een context die in beide bovenvermelde handboeken gebruikt worden bij de behandeling van exponentiële en logaritmische functies.

In de derde werktekst gebruiken we de bovenstaande context in een oefening over exponentiële en logaritmische functies. De leerling kan zelf bepalen welke naam hij/zij de functie geeft. Er wordt gewerkt met de GRM vandaar dat x wellicht als onbekende voor de tijd zal genomen worden. Hoewel de bacteriën een zinnige context vormen voor de wiskundelessen, worden deze in de biologielessen veel minder besproken.

De Turkse tortel gaf aanleiding tot het schrijven van het artikel over logistische groei in Uitwiskeling. We nemen hier paragrafen 4, 5 en 6 uit het artikel bijna integraal over. Het behandelt de continue versie van het logistische groeimodel. Leerkrachten wiskunde kunnen hier inspiratie opdoen voor de lessen over exponentiële functies, integralen en differentiaalvergelijkingen. Het kan ook gebruikt worden in de vrije ruimte en sluit aan bij de groeistadia van de kikkers uit deel 1 van deze cursus. Differentiaalvergelijkingen vinden we terug in zowel de leerplannen van het vrij onderwijs als van het gemeenschapsonderwijs. In het vrij onderwijs is het een verplicht onderwerp voor het A-leerplan met 8 uren wiskunde in het TSO (Industriële Wetenschappen) en een keuzeonderwerp in het A-leerplan met 6 uren wiskunde van het ASO en TSO. In het gemeenschapsonderwijs is het een onderwerp van de facultatieve uitbreiding bij het leerplan voor de richtingen van het ASO met 7 lestijden wiskunde per week. In de populatiedynamica wordt het aantal individuen in een populatie op het tijdstip t voorgesteld door $N(t)$. In de teksten over de Turkse tortel en de logistische differentiaalvergelijking zullen we deze notaties gebruiken.

De muizen- en uilenpopulatie ten slotte vind je terug in de vorm van 'het prooi- en roofdiermodel'. Het is een toepassing op de algemene sinusfunctie. Goniometrische functies met als onderdeel de algemene sinusfunctie vind je in nagenoeg alle leerplannen van de derde graad zowel in het vrij als in het gemeenschapsonderwijs.

2.2.1 De J-curve

In de onderstaande werktekst worden exponentiële en logaritmische functies ingeleid.

Werktekst 1: De waterhyacint

De Kafue is één van de grote rivieren in Zambia, een land in Zuidelijk Afrika. Deze rivier kronkelt doorheen het land. Je komt haar o.a. tegen op ongeveer 15 km na het stadje Kafue, als je van Lusaka naar Chirundu rijdt. In 1996 kon je nog nijlpaarden zien van op de brug over de rivier. In 1999 zag je enkel de waterhyacint die het hele wateroppervlak bedekte. In 2001 hebben ze de rivier aangepakt en werd de waterhyacint verwijderd. Ook het Karibameer had last van dezelfde snel groeiende plant. Het Karibameer is een stuwmeer op de grens tussen Zambia en Zimbabwe. Het meer is 220 km lang en 40 km breed en heeft een oppervlakte van ongeveer 6 000 km².

De mooie waterhyacint werd door een goedbedoelende Europeaan ingevoerd. Nu blijkt het echter een snel groeiende plant te zijn die het meer en de rivieren bedekt en als dusdanig het leven in de Zambiaanse wateren beïnvloedt. Het voorbeeld dat we in deze tekst behandelen gaat over een dergelijke snelgroeiende waterplant.

We veronderstellen dat op 1 januari van dit jaar de plant 30 km² van de oppervlakte van het Karibameer bedekte. De oppervlakte die door de plant bedekt wordt, verdubbelt elk jaar.

1. Wanneer zal de plant 60 km^2 van het meer bedekken?

   (*na 2 jaar)*

2. Wanneer zal de plant 340 km^2 van het meer bedekken?

   (na 4 jaar)

3. Wanneer was er 7,5 km^2 van het meer bedekt?

   (2 jaar geleden)

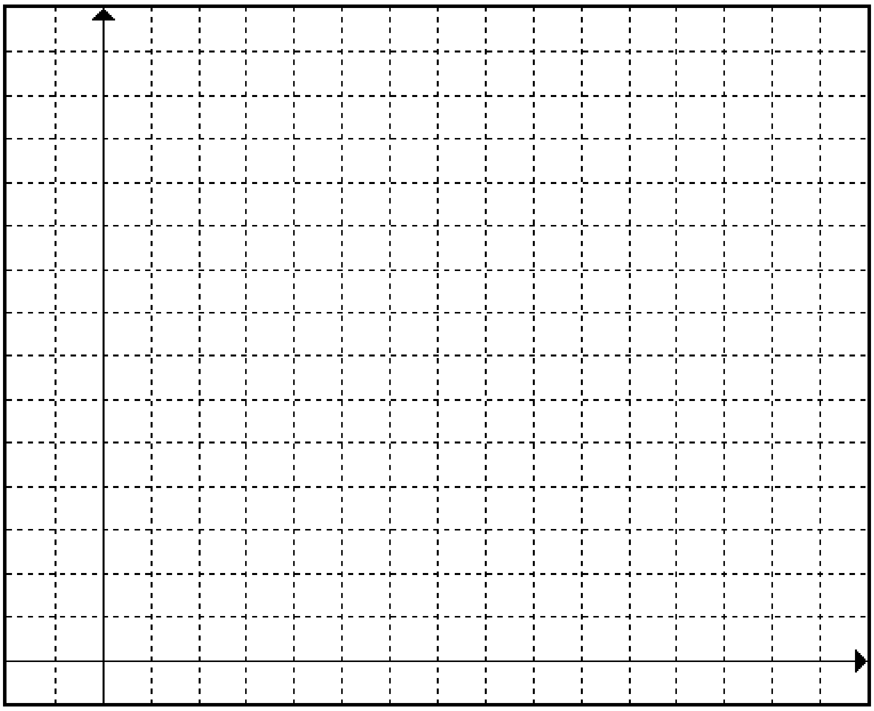
4. Na 7 jaar bedekt de plant de *helft* van het meer. Waneer zal het meer volledig bedekt zijn door de plant als we veronderstellen dat de plant op dezelfde manier blijft verder groeien?

   (na 8 jaar)

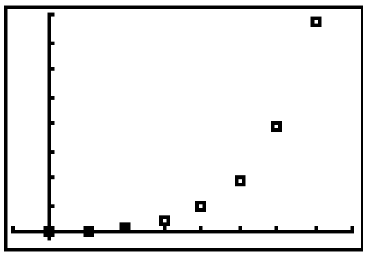
5. Vul de volgende tabel aan: (0 jaar komt overeen met 1 januari van dit jaar)

Na … jaar	0	1	2	3	4	5	6	7
Oppervlakte in km^2	30	60						

6. Gebruik de gegevens uit de bovenstaande tabel, voer de lijsten in in de GRM en maak een grafiek. Neem de grafiek vervolgens over op het onderstaande rooster.



(De grafiek vind je op het onderstaande scherm van de GRM)



7. De grafiek stelt de oppervlakte die de plant bedekt voor als functie van de tijd in jaren. Leg uit waarom het zin heeft om de punten die je uit de tabel van vraag 5 op het rooster plaatst te verbinden.

   (De plant groeit continu aan. Ook na 1,5 jaar heeft deze plant een bepaalde oppervlakte van het meer bedekt.)

Naast een grafische voorstelling kan de functie ook beschreven worden door een functievoorschrift. In wat volgt trachten we het voorschrift te vinden voor de groei van de water plant.

Op het ogenblik t=0 kennen we de oppervlakte A. Deze is 30 km². We schrijven dit als volgt:

A(0) = 30 (lees: De oppervlakte A voor t=0 is gelijk aan 30)

Op het ogenblik t=1 weten we dat de oppervlakte A 60 km² is. We schrijven:

A(1) = 60 (lees: De oppervlakte A voor t=1 is gelijk aan 60)

8. Vul het volgende schema aan:

t = 0	A(0) = 30
t = 1	A(1) = 60 = 30 x 2
t = 2	A(2) = 120 = (30x2) x 2 = 30 x ___

t = 3 A(3) = 340 = (30 x __) x 2 = 30 x ____

t = 4 A(4) =

Algemeen A(t) =

Deze algemene uitdrukking is het functievoorschrift. Het biedt je de mogelijkheid om op een willekeurig ogenblik de oppervlakte van de waterplant te bepalen. Je moet enkel de veranderlijke t vervangen door het gegeven tijdstip. Je vond wellicht het volgende voorschrift: $A(t) = 30 \cdot 2^t$

9. Gebruik het functievoorschrift om de oppervlakte te bepalen na 10 jaar.

   ($A(10) = 30 \cdot 2^{10} = 30720$. *De oppervlakte is dus* 30 720 *km²)*

Daar het Karibameer al bedekt zou zijn met de waterplant na 8 jaar heeft de bovenstaande vraag niet veel zin. Stel echter dat 'lake Malawi' ook problemen zou hebben met dezelfde plant. Lake Malawi is het derde grootste meer van Afrika en is 24 000 km² groot.

10. Zou lake Malawi na 10 jaar volledig bedekt zijn met de waterplant?

    (Ja, want 30 720 *km² is meer dan de grootte van lake Malawi)*

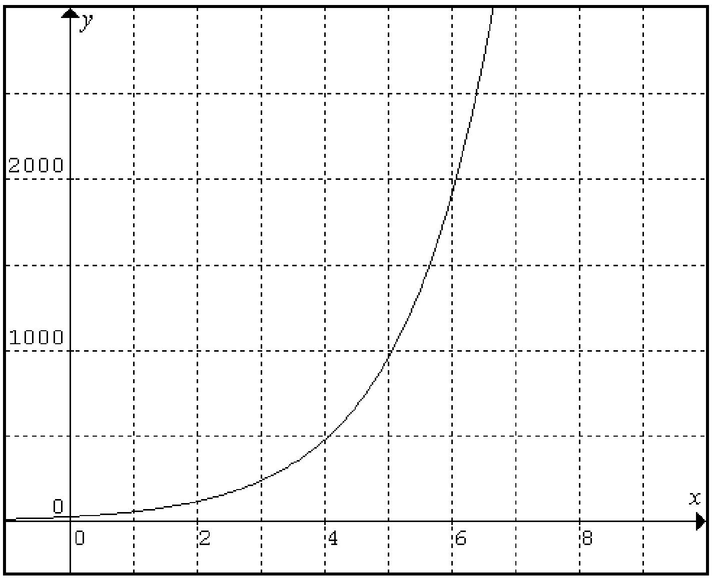
11. We noemen dit soort functie een *exponentiële functie*. Probeer te verduidelijken waarom deze juist een 'exponentiele' functie genoemd wordt.

    (*De variabele x staat in de exponent*)

In het functievoorschrift $A(t) = 30 \cdot 2^t$ staat **30** voor de oppervlakte bij de beginsituatie als $t = 0$ (de oppervlakte van de waterplant in januari van dit jaar.)

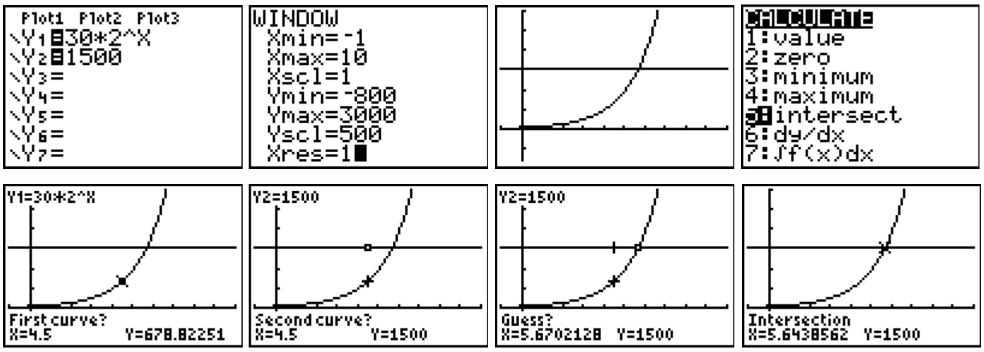
De **2** is de groeifactor. De groeifactor geeft aan hoeveel de oppervlakte elk jaar toeneemt. In het voorbeeld van de waterplant wordt de oppervlakte elk jaar 2 maal groter.

We bekijken nog eens de grafiek die bij dit voorschrift hoort.



12. Bepaal in welk jaar er 120 km², 960 km² en 1500 km² van het meer bedekt zal zijn. Je mag om deze vraag op te lossen het functievoorschrift gebruiken, de grafiek en je GRM.

(Om de exacte uitkomst te vinden voor 1500*km² moeten de leerlingen de GRM gebruiken. De volgende schermafdrukken tonen hoe.)*



In deze werktekst hebben we eerst een functievoorschrift gezocht om de *oppervlakte te vinden* als *de tijd gegeven* is (zie vraag 8). Dit voorschrift hebben we gebruikt om op een willekeurig ogenblik de corresponderende oppervlakte te vinden. In vraag 9 hebben we t door 10 vervangen en vonden we de bijhorende oppervlakte A.

De functie kunnen we echter niet rechtstreeks gebuiken als we de vraag veranderen – als we de *tijd moeten vinden* als *de oppervlakte gegeven* is. In vraag 12 was telkens de oppervlakte gegeven en het bijhorende tijdstip was gevraagd. We moesten de volgende vergelijkingen oplossen: $120 = 30 \cdot 2^t$, $960 = 30 \cdot 2^t$ en $1500 = 30 \cdot 2^t$ of na vereenvoudiging: $4 = 2^t$, $32 = 2^t$ en $50 = 2^t$. De eerste twee vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen omdat de gezochte exponent *t* een natuurlijk getal is. De laatste vergelijking 'komt niet mooi uit'. Toch kan de oplossing benaderend gevonden worden door te redeneren dat *t* tussen 5 en 6 moet liggen. We kunnen het resultaat ook aflezen van de grafiek of berekenen met de GRM. Feit is dat we op zoek gaan naar een exponent. We zoeken de exponent waartoe we 2 moeten verheffen om 50 te bekomen. De functie die dit soort vraag oplost, noemen we de ***logaritmische functie*.** Het is de omgekeerde functie van de exponentiële functie.

We schrijven deze functie als volgt $^2\log 50$

Het functievoorschrift $t = {}^2\log 50$ geeft de tijd horende bij een gegeven oppervlakte.

Schematisch kunnen we exponentiële en logaritmische functies als volgt voorstellen:

In vraag 1 – 11 gebruiken we de exponentiële functie om de oppervlakte te vinden bij een gegeven tijdstip:

GEGEVEN		GEVRAAGD
Tijd	⟶	**oppervlakte**
	Exponentiële functie	
10 jaar	⟶	30 720 m²
	$30 \cdot 2^{10}$	

In vraag 12 gebruiken we de logaritmische functie om het tijdstip te vinden bij een gegeven oppervlakte. We zoeken daarenboven een exponent.

GEGEVEN		GEVRAAGD
oppervlakte	$\longrightarrow$	**Tijd**
	Logaritmische functie	
1500 m²	$\longrightarrow$	5,64 jaar
	${}^{2}\log\frac{1500}{30}$	

De tweede uitdrukking ${}^{2}\log 50$ geeft aan dat de groeifactor voor de waterplant 2 is. ${}^{2}\log 50$ geeft het ogenblik dat de plant een oppervlakte van 1500 m² $\left(\frac{1500}{30}=50\right)$ bedekt als de groeifactor van de waterplant 2 is. Daarnaast is het de exponent waartoe je 2 moet verheffen om 50 te bekomen. Dus ${}^{2}\log 50 = 5,64385619...$

Zo ook is ${}^{2}\log 8 = 3$

context-betekenis: 3 (jaar) is het ogenblik waarop 240 m² van de oppervlakte van het meer bedekt wordt door de plant als de groeifactor 2 is en de oppervlakte die oorspronkelijk bedekt was 30 m² is.

abstracte-betekenis: 3 is de exponent waartoe je 2 moet verheffen om 8 te bekomen

13. Leg uit waarom ${}^{3}\log 81 = 4$
14. Bepaal ${}^{5}\log 25$
15. Bepaal indien mogelijk de volgende logaritmen:
    - ${}^{2}\log 64 =$
    - ${}^{2}\log 128 =$
    - ${}^{2}\log 1024 =$
    - ${}^{2}\log 16 =$
    - ${}^{2}\log 1 =$
    - ${}^{2}\log 0 =$
    - ${}^{2}\log(-7) =$
    - ${}^{2}\log\frac{1}{2} =$

- $^{2}\log\frac{1}{8} =$
- $^{3}\log 9 =$
- $^{10}\log 1000 =$
- $^{4}\log\frac{1}{16} =$
- $^{\sqrt{2}}\log 8 =$
- $^{3}\log(-9) =$
- $^{0}\log 9 =$
- $^{1}\log 9 =$
- $^{5}\log 5 =$

Algemeen (vul de volgende definitie aan)

De logaritmische functie met grondtal a heeft als voorschrift

$y = {}^{a}\log x$, hierbij is $a \in$ ________, $x \in$ __________ en $y \in$ __________

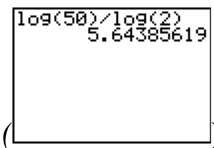
Tevens geldt: $y = {}^{a}\log x \Leftrightarrow$ _________________

Opmerking: Op de GRM vind je LOG. Dit is de logaritme met grondtal 10. We schrijven de 10 niet. Deze logaritme wordt de Briggse logaritme genoemd.

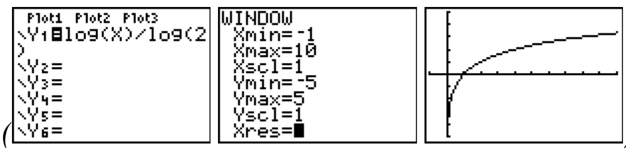
De volgende eigenschap laat je toe om een willekeurige logaritme met de GRM te berekenen:

$^{b}\log x = \dfrac{^{a}\log x}{^{a}\log b}$ Als we immers a = 10, dan wordt de formule: $^{b}\log x = \dfrac{\log x}{\log b}$.

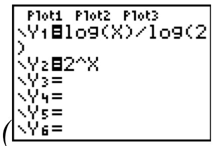
16. Gebruik de bovenstaande eigenschap om $^{2}\log 50$ te berekenen.

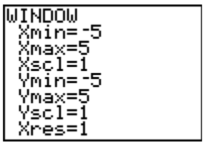


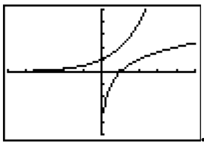
17. Maak de grafiek van de logaritmische functie met grondtal 2 met de GRM.



18. Teken met de GRM de volgende functies: $y = 2^{x}$ en $y = {}^{2}\log x$. Bestudeer het verband tussen deze grafieken.

(



. *De grafieken liggen symmetrisch t.o.v. de rechte* $y = x$ *.)*

In de volgende werktekst vergelijken we lineaire en exponentiële groei. Het begrip '*groeisnelheid*' komt hier aan bod. We beschouwen de gemiddelde absolute groeisnelheid over een bepaald interval. We werpen eerst een korte blik op het al dan niet constant zijn van de absolute groeisnelheid.

Groeisnelheid en lineaire groei

Lineaire functies zijn functies met een constante groeisnelheid. Zij hebben de vergelijking $f(x) = ax + b$. Bij een zelfde toename van *x* zal *f(x)* met een zelfde waarde toenemen. Als we *x* met 1 laten toenemen, neemt *f(x)* met *a* toe. Voorbeeld: Door de baggerwerken wordt het meer elke week (*x* met 1 laten toenemen) 550m² groter (*a* = 550).

Groeisnelheid en exponentiële groei

Exponentiële functies zijn functies waarbij de absolute groeisnelheid niet constant is. Zij hebben de vergelijking $f(x) = b \cdot g^x$. In het voorbeeld blijkt duidelijk dat (als g>1 is) bij gelijke toename van *x f(x)* steeds met een grotere waarde toeneemt naarmate *x* groter is. De groeifactor per tijdseenheid is wel constant. Deze wordt in de onderstaande tekst gedefinieerd als het quotiënt van de twee functiewaarden bij *x* en de toegenomen waarde van *x*. Voorbeeld: De oppervlakte van de algen neemt elke week meer toe. De eerste week is er 5m² algen bijgekomen, de tweede week 10m². De groeifactor is echter wel constant en nl. 2. je kan hem vinden door twee opeenvolgende waarden te delen door elkaar: $\frac{10}{5} = 2$.

Werktekst 2: Baggeren en algen

In een riviervlakte wordt grind gebaggerd. Zo ontstaat een meer. Bij het begin van de werken heeft dit meer een oppervlakte van 800 m2 water. Door de baggerwerken wordt het meer elke week 550 m2 groter. Na het baggeren wil men het meer zo vlug mogelijk voor waterrecreatie gebruiken. Daarom wordt de kwaliteit van het water regelmatig gecontroleerd. Bij het begin van de werken vindt men 5 m2 van een bepaalde algensoort in het meer. Tijdens de volgende weken verdubbelt deze oppervlakte elke week. Iemand merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. Het meer zal anders vlug volledig bedekt zijn met algen. Maar de beambte van het ministerie van volksgezondheid ziet voorlopig geen gevaar: "Het meer wordt toch elke week 600m2 groter."

Wat denk jij hiervan? Los de onderstaande vragen op om een antwoord te vinden op deze vraag.

1. Onderzoek hoe beide oppervlakte groeien. Vul hiervoor de volgende tabel in:

Tijdstip (in weken) na begin baggeren	Oppervlakte meer in m²	Oppervlakte algen in m²
0	800	5
1	800 + 550 =	5.2 =
2		
3		

5		
10		
15		
t		

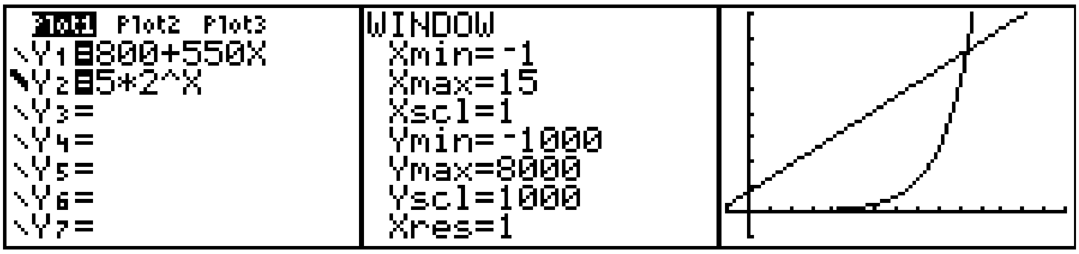
(De oppervlakte van het meer is achtereenvolgens 800, 1350, 1900, 2450, 3550, 6300, 9050 *en* 800 + *t*.550. *De oppervlakte van de algen is achtereenvolgens* 5, 10, 20, 40, 160, 5120, 163849 *en* $5 \cdot 2^t$ *.)*

2. Noem $f(t)$ de oppervlakte van het meer en $g(t)$ de oppervlakte ingenomen door de algen, *t* weken na het begin van het baggeren. Geef het voorschrift van $f(t)$ en $g(t)$.

   ($f(t) = 800 + 550t$ en $g(t) = 5 \cdot 2^t$ *)*

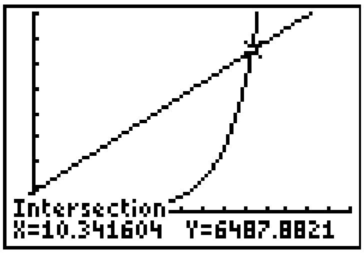
3. Plot de grafiek van beide oppervlakten in functie van de tijd.

   (De grafiek vind je op de onderstaande schermafdrukken.)



4. Na hoeveel weken is het meer vol algen als men blijft baggeren en de algen op dezelfde wijze blijven groeien? Lees dit af van de grafiek uit 3.

   (We zoeken de doorsnede van de twee krommen en vinden dat het meer vol algen zal zijn in de loop van de elfde week. Je vindt de bijhorende schermafdruk hieronder.)



5. Wat vind jij het meest opvallende verschil tussen beide grafieken?
6. Wat gebeurt er met de oppervlakte van het meer per week?

   (vermeerdert met 550m)

We noemen de groei van de oppervlakte van het meer *lineair*. Het woord lineair komt vanuit het latijn 'Linea recta'.

7. Tracht te verklaren waarom dit juist lineaire groei genoemd wordt?

   (De grafiek is een rechte lijn)

8. De groeisnelheid is de hoeveelheid oppervlakte waarmee het meer per week toeneemt. Wat is de groeisnelheid?

   (550m)

9. Bekijk het functievoorschrift voor $f(t)$. Waar vind je hier de groeisnelheid terug? Waar vind je de oorspronkelijke oppervlakte van het meer terug?

(De groeisnelheid is de coëfficiënt van t en de oorspronkelijke oppervlakte is de constante term van het voorschrift.)

Bij lineaire groei is het functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$

Hierbij is b de beginwaarde en a de groeisnelheid. De grafiek is een rechte. b geeft de hoogte aan waarop de grafiek de y-as snijdt en a geeft de helling van de grafiek.
Bij gelijke tijdsintervallen zijn ook de (oppervlakte-) toenamen gelijk.

10. De groeisnelheid van de oppervlakte van de algen is niet constant. Verklaar.

(Elke week komt er meer oppervlakte bij. De eerste week groeit de oppervlakte aan met 5m², de tweede met 10m², de derde week met 20m²,… Er komt altijd evenveel oppervlakte bij als er al was.)

11. Wat is het verband tussen de oppervlakte na 7 weken en de oppervlakte na 8 weken?

(De oppervlakte na 8 weken is het dubbele van de oppervlakte na 7 weken. De verhouding tussen beide oppervlaktes is 2.)

We noemen dit getal de groeifactor over de 8ste week.

Algemeen: $\text{groeifactor over de n-de week} = \dfrac{\text{oppervlakte einde n-de week}}{\text{oppervlakte begin n-de week}}$

12. Hoe groot is de groeifactor van de algen over de 3de week? En over de 5de en 7de week? Wat valt op?

(De groeifactor is steeds 2.)

We noemen de groei van de oppervlakte van de algen *exponentieel*.
Bij exponentiële groei ontstaat de volgende waarde uit de vorige door vermenigvuldiging met een getal. Dit getal is constant als de tijdsintervallen even groot zijn. Dit getal heet de *groeifactor*.

13. Bekijk het functievoorschrift voor $g(t)$. Tracht te verklaren waarom deze groei *exponentieel* genoemd wordt.

(De variabele t komt voor in de exponent)

14. In een andere vijver zit een algensoort die per drie weken verzesvoudigd. Groeit deze soort even snel als de eerste?

(Deze groeit niet even snel aan. Stel dat we starten met 5m² algen. De eerste algensoort is na drie weken aangegroeid tot 40m², de tweede is slechts aangegroeid tot 30m².)

15. Bedenk een functievoorschrift voor de oppervlakte van een algensoort waarvan er op een tijdstip $t = 0$ 8m² was en de oppervlakte elke week met de helft van de oppervlakte toeneemt.

($f(t) = 8 \cdot 1{,}5^t$)

16. Bedenk een functievoorschrift voor de oppervlakte van een algensoort waarvan er op een tijdstip $t = 0$ 8m² was en de oppervlakte elke week met 25% toeneemt.
17. Met hoeveel procent groeien de algen uit vraag 1 per week?

(met 100%)

> Bij exponentiële groei is het functievoorschrift $f(x) = b \cdot g^x$
> Met b de beginwaarde $(x = 0)$ en g de groeifactor over het tijdsinterval
> Als de procentuele toename per tijdseenheid p% is, dan is de groeifactor $1 + \frac{p}{100}$.

Werktekst 3: Bacteriën

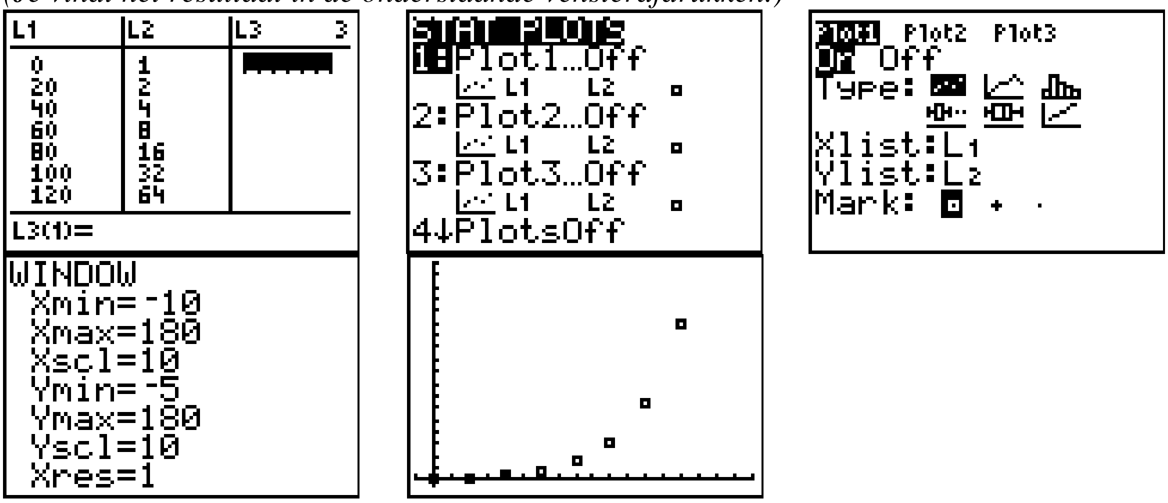
'Bij bacteriën vindt de voortplanting meestal ongeslachtelijk plaats doordat één bacterie zich in tweeën deelt. Dat gebeurt in gunstige omstandigheden bijna om de 20 minuten. Als je die gegevens uitzet in een grafiek, geeft de figuur je een idee van de bevolkingsexplosie die één enkel bacterie kan veroorzaken.' (Uit Macro/micro in de biologie 4)

1. Bepaal het aantal bacteriën na 20, 40… minuten. En vul de onderstaande tabel aan:

Tijd in minuten	20	40	60	80					
Aantal bacteriën									

2. Voer de bovenstaande waarden in in je GRM en maak een grafiek door de punten te plotten.

(Je vindt het resultaat in de onderstaande vensterafdrukken.)

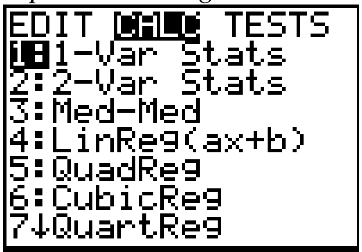


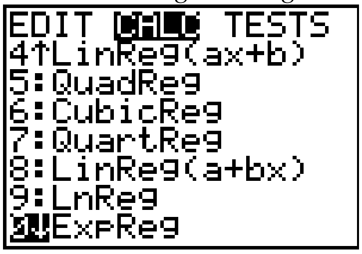
3. Bepaal het aantal bacteriën na *t* minuten en geef dus een functievoorschrift voor het aantal bacteriën in functie van de tijd uitgedrukt in minuten.

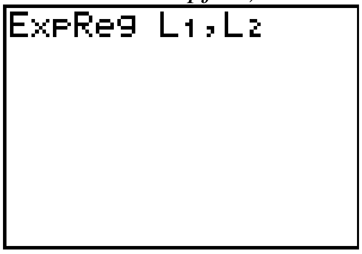
$(f(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{20}} = 2^{\frac{t}{20}})$

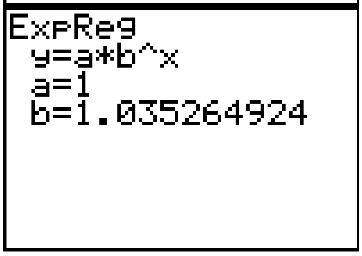
4. Pas exponentiële regressie toe op de ingevoerde lijsten en bepaal zo een exponentieel functievoorschrift voor het aantal bacteriën.

(In deel 1 werd reeds besproken hoe logistische regressie kan uitgevoerd worden. Gebruik de `[STAT]` *toets. Zo krijg je het eerste scherm hieronder. Kies in dit menu voor exponentiële regressie. De verdere uitwerking wordt getoond door de schermpjes.)*

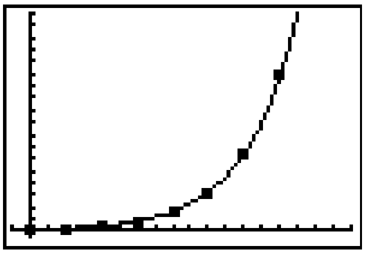








Door `[ExpReg L1, L2, Y1]` in je GRM in te voeren, waarbij je `[Y1]` oproept vanuit `[VARS]`, wordt het functievoorschrift meteen in de functie `[Y1]` ingevoerd. Druk vervolgens op `[GRAPH]` en je merkt dat de grafiek inderdaad alle punten uit de tabel van vraag 1 bevat.



5. Heb je in vraag 3 en 4 hetzelfde voorschrift gevonden? Indien niet, los je de volgende vragen op.

   5.1. Na 20 minuten zijn er 2 bacteriën. Vul in je voorschrift 20 in voor de onbekende x, wat is je resultaat? Herhaal dit als de tijd 40, 60, 80 minuten is.

   (antwoord hangt af van het gevonden voorschrift)

Na … minuten	Zijn er … bacteriën	Het aantal is … maal verdubbeld
20	2	1
40	4	2
60		
100		
180		
X		

(Antwoorden kolom 2: 8, 32,512. Antwoorden kolom 3: 3, 5, 9, $\frac{x}{20}$*.)*

5.2. Geef nu het juiste voorschrift en vergelijk met het voorschrift van de GRM.

$$(y = 2^{\frac{x}{20}} = \left(2^{\frac{1}{20}}\right)^x = 1{,}03526...^x)$$

6. Bepaal na hoeveel uur er één miljoen bacteriën zijn. Geef je antwoord correct tot op de minuut.

(Dit kan op verschillende manieren opgelost worden. Grafisch: Bepaal het snijpunt van de grafiek van $y = 2^{\frac{x}{20}}$ (deze geeft immers het aantal bacteriën op elk tijdstip *x*) *met deze van* $y = 10^6$ *(één miljoen bacteriën). Algebraïsch: Bepaal* ${}^{2^{\frac{1}{20}}}\log 10^6 = \dfrac{\log 10^6}{\log 2^{\frac{1}{20}}}$. *We zoeken immers een oplossing voor de vergelijking* $10^6 = \left(2^{\frac{1}{20}}\right)^x$ *, dit is* ${}^{2^{\frac{1}{20}}}\log 10^6$. *Na* 6 *uur en 39 minuten zijn er één miljoen bacteriën.)*

Voor de behandeling van de volgende tekst moeten de leerlingen het begrip afgeleide kennen. We maken er een onderscheid tussen absolute (ogenblikkelijke) groeisnelheid van de populatie die wordt gegeven door N' (de afgeleide van de functie *N)*. *N* stelt in deze context het aantal individuen van een bepaalde populatie voor op een bepaald tijdstip. N' geeft de absolute groeisnelheid (de toename van de populatie op een bepaald tijdstip) en $\frac{N'}{N}$ de relatieve groeisnelheid (de toename van de populatie t.o.v. de grootte van de populatie). Deze laatste wordt in de biologie de *per capita groeisnelheid* genoemd. We werpen eerst een korte blik op het constant zijn van de absolute en relatieve groeisnelheid en brengen dit in verband met het begrip afgeleide.

Groeisnelheid en lineaire groei

Lineaire functies zijn de enige functies met een constante groeisnelheid: $N'(t) = a \Leftrightarrow N = at + b$. De vergelijking $N'(t) = a$ drukt uit dat de groeisnelheid constant is. Het is een vergelijking waarvan de onbekende een functie is, namelijk $N(t)$. In deze vergelijking komt de afgeleide $N'(t)$ van deze onbekende functie voor. Deze vergelijking noemen we daarom een *differentiaalvergelijking*. Bemerk dat de differentiaalvergelijking oneindig veel oplossingen heeft: $N = at + b$ met *b* een willekeurig reëel getal. Om een groeifunctie volledig te kennen, volstaat het dus niet om de groeisnelheid te kennen. Je moet (bijvoorbeeld) ook de beginwaarde kennen. We zullen de beginwaarde voorstellen door N_0. De vergelijking die uitdrukt dat de beginwaarde gelijk is aan N_0, is $N(0) = N_0$ en wordt de *beginvoorwaarde* genoemd. Uit de beginvoorwaarde vinden we dat $b = N_0$ en dus is $N = at + N_0$.

Groeisnelheid en exponentiële groei

Exponentiële functies zijn de enige functies met een constante relatieve groeisnelheid: $\frac{N'}{N} = r \Leftrightarrow N = be^{rt}$. Zoals lineaire groei gekarakteriseerd wordt door de eigenschap dat de groeisnelheid constant is, wordt exponentiële groei gekarakteriseerd door de eigenschap dat de groeisnelheid evenredig is met de populatiegrootte ($N' = rN$) of, equivalent, dat de relatieve groeisnelheid constant is ($\frac{N'}{N}=r$) . We kunnen deze eigenschap op twee manieren bewijzen. De ene manier maakt enkel gebruiken van het begrip afgeleide. De tweede manier maakt gebruik van de integraalrekening. Beide methodes kunnen aan bod komen in het 6de jaar.

Eerste manier:

$N=be^{rt}\Rightarrow\frac{N'}{N}=r$:

$$N=be^{rt}\Rightarrow N'=bDe^{rt}\Rightarrow N'=bre^{rt}\Rightarrow N'=r.N\Rightarrow\frac{N'}{N}=r$$

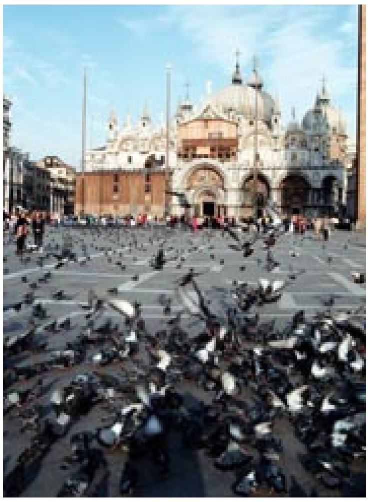
$\frac{N'}{N}=r\Rightarrow N=be^{rt}$:

$$\frac{N'}{N}=r\Rightarrow N'=rN\Rightarrow\left(\frac{N}{e^{rt}}\right)'=\frac{e^{rt}\cdot N'-N\left(e^{rt}\right)'}{e^{2rt}}=\frac{e^{rt}rN-Nre^{rt}}{e^{2rt}}=0\Rightarrow\frac{N}{e^{rt}}=b\Rightarrow N=be^{rt}$$

Tweede manier:

Veronderstel dat we van een functie $N(t)$ waarvan we het voorschrift niet kennen, weten dat ze voor elke waarde van t voldoet aan $N'(t)=rN(t)$ voor een zeker getal r. Ze geeft een verband tussen de onbekende functie en haar afgeleide en is bijgevolg ook een differentiaalvergelijking. We zoeken nu welke functies aan deze vergelijking voldoen. Daartoe herschrijven we de differentiaalvergelijking in de vorm $\frac{N'(t)}{N(t)}=\left(\ln N(t)\right)'=r$. Hieruit leiden we af dat $\ln\left|N(t)\right|=rt+c$ voor een zeker getal c. Hieruit volgt dat $N=\pm e^{rt+c}=\pm e^{c}e^{rt}=be^{rt}$, waarbij we $\pm e^{c}$ vervangen hebben door b. Als we de beginwaarde van N in het voorschrift verwerken, krijgen we $N=N_0e^{rt}$. Als $N(t)$ een aantal individuen in een populatie voorstelt, weten we dat b een positief getal is dat bijgevolg gelijk is aan e^{c} .

Werktekst 4: Over duiven en zeehonden



De wilde duiven van Venetië moeten aan de pil. Er zijn er teveel. Daarom wil de stad de populatie met de helft terugbrengen door de beesten voer te geven, waarin een middel zit dat de voortplanting stopt. Privé personen die de duiven nog zouden voeren, kunnen rekenen op een fikse boete. Enkel voor het befaamde San Marcoplein wordt een uitzondering gemaakt. (Uit 'Het nieuwsblad' enkele jaren geleden)

DENDERMONDE - „Bouw speciale duivenhokken voor de zwerfduiven. Verbied de bewoners de duiven nog te voederen. En vervang de duiveneieren door gipsen exemplaren." Dat is het recept waarmee Gaia de duivenplaag in Dendermonde en Baasrode wil indijken. Milieuambtenaar Tarcy Vander Straeten ziet wel wat in het voorstel omdat er ook elders met die methode al succes is geboekt. De geplaagde bewoners zelf zijn kritisch: “Men had het probleem veel sneller moeten aanpakken toen het nog veel beperkter was.” “Duiven slagen er zeer goed in om de eigen populatie te controleren afhankelijk van het voedsel dat ze ter beschikking hebben. Indien men de inwoners ervan kan overtuigen om hun voederactiviteiten drastisch te verminderen, zal het aantal duiven sterk afnemen, zelfs zonder dat men bijkomende maatregelen moet nemen." (Uit 'Het Nieuwsblad' zaterdag 19/11/05)

De bovenstaande artikels geven aan dat de mens de natuur beïnvloedt. Plaats eenzelfde populatie dieren in een stedelijk gebied en in de natuur en je zult merken dat ze op een andere manier evolueert. In deze werktekst bestuderen we de groei van een populatie. De populatiegrootte op tijdstip *t* stellen we voor door $N(t)$. We veronderstellen dat de relatieve (ogenblikkelijke) groeisnelheid $\frac{N'(t)}{N(t)}$ constant is en noteren ze met *r*. Deze veronderstelling betekent dat de *absolute groeisnelheid* $N'(t)$ recht evenredig is met het *aantal duiven*. Dit is logisch. Als er weinig duiven zijn, kunnen er ook weinig duiven geboren worden en als er veel duiven zijn, wordt er veel gepaard en kunnen er veel duiven geboren worden. "Hoe meer zielen, hoe meer vreugd." De populatiegrootte groeit in dergelijke omstandigheden exponentieel.

1. De functie die de evolutie van de populatiegrootte beschrijft, is de exponentiële functie met als vergelijking: $N(t) = N_0 e^{rt}$. Verklaar dit!

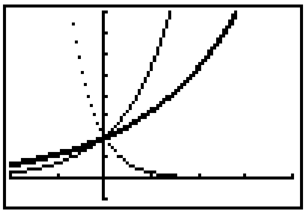
   (De verklaring wordt gegeven door de eigenschap. $N'(t) = rN(t) \Leftrightarrow N(t) = N_0 e^{rt}$. *Lees hiervoor de verklarende tekst hierboven.)*

De grafiek van deze functie wordt in de biologie een *J*-vormige groeicurve genoemd. We zullen nochtans merken dat de grafiek niet altijd lijkt op een *J*.

In wat volgt veronderstellen we dat er 10 (vrouwelijke) duiven in een bepaald gebied zijn op het tijdstip $t = 0$.

2. We stellen achtereenvolgens $r = 1$, $r = 0{,}5$ en $r = -2$. Schets in één assenstelsel de groeicurve in elk van de bovenstaande gevallen. Bepaal telkens de groeifactor van de exponentiële functie.

   (De grafieken worden getoond in de onderstaande figuur.

   De groeifactor vind je uit de vergelijking $N(t) = N_0 e^{rt}$, *deze kan je anders schrijven als* $N(t) = N_0 \left(e^r\right)^t$ *hieruit blijkt dat de groeifactor* $g = e^r$. *en zijn dus respectievelijk* $e \approx 2{,}72$, $\sqrt{e} \approx 1{,}65$ *(dikke lijn) en* $e^{-2} \approx 0{,}14$ *(puntjeslijn). In werktekst 2 van deze paragraaf is het begrip groeifactor gedefinieerd.)*

3. Leg telkens de betekenis uit van een dergelijke groeisnelheid d.m.v. het begrip groeifactor.

   (De groeisnelheid 1 *geeft een exponentiële functie met groeifactor* 2,72. *Dit betekent dat de populatie per tijdseenheid aangroeit met* 172%. *Elke duif zorgt (gemiddeld!) voor* 2,72 *duiven in de volgende tijdseenheid. Indien ze zelf nog leeft, heeft ze voor* 1,72 *nakomelingen gezorgd. Indien ze niet meer leeft voor* 2,72. *Zo ook wil groeisnelheid* 0,5 *zeggen dat de populatie per tijdseenheid met* 65% *aangroeit. De groeisnelheid* -2 *geeft een exponentiële functie met groeifactor* 0,14. *Dit duidt op een exponentieel dalende*

functie en een populatie die met 86% *per tijdseenheid afneemt. In het laatste geval hebben we dus een soort die aan het uitsterven is.)*

4. Voor welke waarde van r is de term J-vormige curve niet goed gekozen?

   ($r = -2$)

5. Voor welke waarde van *r* is de populatie constant?

   (Als $r = 0$ *is er geen groei van de populatie. De groeifactor is dan* 1.*)*

6. In de streek waar we de duiven onderzoeken, is de groeisnelheid 0,5. Bereken wanneer de populatie duiven verdubbeld is. We veronderstellen dat de tijd in het exponentieel model wordt uitgedrukt in jaren.

   (Na iets meer dan 16 maanden.)

In ongelimiteerde situaties, d.w.z. wanneer alle individuen zich naar hartelust kunnen voortplanten (geen gebrek aan energie, partners, ...) zal een populatie aan een maximale snelheid groeien. Deze maximale snelheid wordt de *intrinsieke groeisnelheid* genoemd en we noteren ze met r_m. De intrinsieke groeisnelheid is eigen aan de populatie omdat enkel de karakteristieken van het organisme zelf bepalen hoeveel nakomelingen geproduceerd kunnen worden. In het onderstaande tekstje is bijvoorbeeld sprake van de intrinsieke groeisnelheid van een zeehondenpopulatie.

'*Voor het totale internationale waddengebied is de groeisnelheid van de zeehondenpopulatie ruim twaalf procent. […] De groeisnelheid zit vlakbij de intrinsieke groeisnelheid van dertien procent voor deze diersoort, het kan met andere woorden nauwelijks sneller toenemen.*'

Voor een populatie die onbeperkt groeit aan zijn intrinsieke groeisnelheid ontwikkelden we dus het volgende model: $N(t) = N_0 e^{r_m t}$. Onder invloed van allerlei omstandigheden kan dit exponentiële groeimodel danig verstoord worden. Het toedienen van de 'duivenpil' gelijktijdig met voedsel zal bijvoorbeeld zorgen voor een vermindering van de groeisnelheid.

'*Uit de praktijk blijkt dat deze manier niet altijd even goed uitwerkt. Er worden onvolkomen jonge dieren uitgebroed die zwaar gehandicapt zijn.*'

Het niet meer voeren van duiven heeft geen directe invloed op de groeisnelheid van een populatie maar eerder op het aantal duiven dat zich al dan niet in een gebied bevindt.

2.2.2 De S-curve

Net zoals in het discrete geval willen we een groeimodel dat rekening houdt met de *draagkracht* van een gebied. In de volgende werktekst zullen we veronderstellen dat de groeisnelheid evenredig is met een product van twee grootheden: het aantal duiven enerzijds en een factor die rekening houdt met de draagkracht van een gebied anderzijds. We zullen stellen dat de relatieve groeisnelheid volgens een dalende eerstegraadsfunctie afhangt van de populatiegrootte *N*. Dit leidt tot een differentiaalvergelijking. De logistische groeifunctie is een oplossing van deze differentiaalvergelijking.

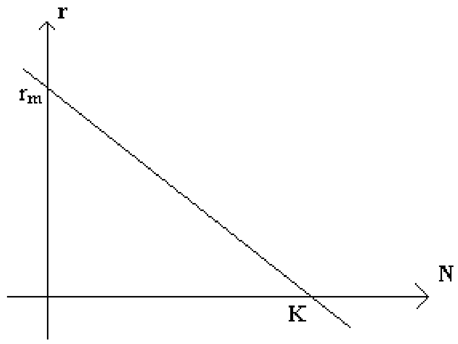
Werktekst 1: Er kan geen duif meer bij

Het is natuurlijk onrealistisch dat het aantal duiven ongelimiteerd kan aangroeien. Naarmate de populatie groeit, zullen de individuen het in werkelijkheid moeilijker krijgen om genoeg voedsel te vinden voor het levensonderhoud, de lichaamsgroei en de reproductie. Er bestaat een grens aan het aantal individuen van een bepaalde soort dat een gegeven ruimte kan dragen. Ecologen noemen deze grenswaarde de *draagkracht* van de habitat (de streek waar de populatie voorkomt). Het is de maximale populatiegrootte die een bepaald gebied kan dragen over een langere periode. We zullen de draagkracht met K noteren. De draagkracht is een eigenschap van de omgeving en varieert in tijd en ruimte, naargelang de variatie in beschikbare hulpbronnen. In wat volgt zullen we rekening houden met deze draagkracht. We zullen afwisselend met een algemene draagkracht K en intrinsieke groeisnelheid r_m werken en met concrete waarden $K=100$ en $r_m=0{,}5$ die ons toelaten om berekeningen uit te voeren. We zullen er steeds van uitgaan dat de intrinsieke groeisnelheid $r_m>0$.

1. Leg uit wat de betekenis is van $K=100$.

   (Het maximale aantal duiven dat het gebied kan dragen, is 100.*)*

Omwille van de beperkte draagkracht van de omgeving, is het dus niet houdbaar om te veronderstellen dat de relatieve groeisnelheid constant is. Als er weinig duiven zijn, zal de groeisnelheid per duif ongeveer gelijk zijn aan de intrinsieke groeisnelheid. Hoe dichter de populatiegrootte bij de draagkracht K komt, hoe lager de relatieve groeisnelheid. We zoeken dus een formule voor de relatieve groeisnelheid r zo dat r ongeveer r_m wordt als het aantal duiven veel kleiner is dan K en zo dat r ongeveer 0 wordt als het aantal duiven de draagkracht K nadert. De eenvoudigste functie die aan deze voorwaarden voldoet is de lineaire functie hieronder:



2. Bepaal de vergelijking van de bovenstaande rechte, d.w.z. geef het verband tussen de relatieve groeisnelheid r en de populatiegrootte N. Werk met een algemene K en r_m.

   (De rechte bevat de punten $(0,r_m)$ *en* $(K,0)$ *met vergelijking:* $r=\frac{-r_m}{K}(N-K)=r_m-\frac{r_m}{K}N$ *)*

3. Wat wordt de vergelijking als $K=100$ en $r_m=0{,}5$?

   ($r=-0{,}005N+0{,}5$ *)*

4. Controleer dat je de vergelijking die je vond in 2 in de vorm $r=r_m\frac{K-N}{K}$ kan schrijven.

   (De vergelijking uit 2. is $r=r_m-\frac{r_m}{K}N=r_m\left(1-\frac{1}{K}N\right)=r_m\frac{K-N}{K}$)

$\frac{K-N}{K}$ is de *ongebruikte mogelijkheid voor groei* van de populatie. In de vorige werktekst veronderstelden we dat $\frac{N'(t)}{N(t)}=r$ waarbij r constant is, dit betekent dat de relatieve groeisnelheid constant is. In deze werktekst hebben we een goede formule gevonden om de grootte van de populatie en de draagkracht in rekening te brengen. De relatieve groeisnelheid is afhankelijk van de grootte van de populatie en de draagkracht van het gebied. We gebruiken het resultaat van vraag 4 en veronderstellen dat

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r_m \frac{K - N(t)}{K}$$

en laten op deze manier de relatieve groeisnelheid variëren in de tijd. De absolute groeisnelheid wordt dan gegeven door

$$N'(t) = r_m N(t) \frac{K - N(t)}{K}$$

5. Vul de onderstaande tabel in voor $K = 100$ en $r_m = 0,5$.

Aantal duiven	Absolute groeisnelheid (onbegrensde groei)	Ongebruikte mogelijkheid voor groei	Absolute groeisnelheid (begrensde groei)	Relatieve groeisnelheid (begrensde groei)
N	$r_m N$	$\frac{K-N}{K}$	$r_m N \frac{K-N}{K}$	$r_m \frac{K-N}{K}$
1				
25				
50				
75				
99				
100				

6. Leg m.b.v. de getallen uit de derde kolom de betekenis uit van de term ‘ongebruikte mogelijkheid voor groei’.

   (Dit is de fractie van het aantal duiven dat er nog bij kan komen.)

7. Hoe evolueren de absolute en relatieve groeisnelheid bij begrensde groei als het aantal duiven toeneemt? Verklaar dit verloop m.b.v. de getallen in de eerste drie kolommen. Waar vermoed je een maximale groeisnelheid?

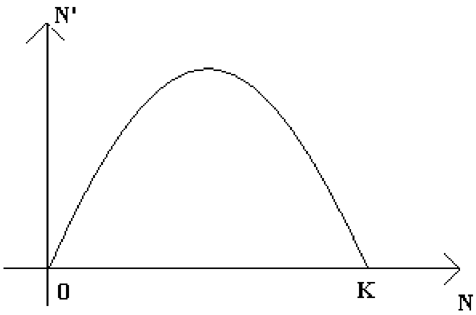
   (De absolute groeisnelheid stijgt eerst en daalt daarna. De factor in de derde kolom heeft een remmende invloed op de absolute groeisnelheid in kolom twee. Deze remmende invloed vergroot naarmate het aantal duiven toeneemt en de ‘ongebruikte ruimte’ verkleint. In de tabel stellen we bovendien vast dat de groeisnelheid even groot is bij 1 *duif als bij* 99 *duiven, en bij* 25 *en* 75 *duiven. Blijkbaar is er symmetrie t.o.v.* 50. *Vermoedelijk bereik je de maximale absolute groeisnelheid bij een populatie van rond de* 50 *duiven. Dit kan verder nagerekend worden door de tabel aan te vullen voor populaties van* 49 *en* 51 *duiven.*

   De relatieve groeisnelheid neemt steeds af. Dit is slechts een controle van wat we al wisten. We hebben immers het model zo opgesteld. Zie hiervoor vragen 2 *en* 3.*)*

8. Hierboven is een grafiek gegeven van de *relatieve* groeisnelheid *r* in functie van de populatiegrootte *N*. Schets nu ook een grafiek van de *absolute* groeisnelheid N' in

functie van de populatiegrootte N als de intrinsieke groeisnelheid positief is. Verklaar hiermee de vaststellingen uit de tabel.

(De grafiek is een parabool en wordt hieronder geschetst. De top van de parabool geeft de maximale groeisnelheid. De groeisnelheid stijgt als het aantal duiven toeneemt tot een bepaald aantal dat zich lijkt te situeren halverwege de draagkracht. Het is niet moeilijk om dit vermoeden hard te maken, bijvoorbeeld: het product van N en $K-N$ *is maximaal als* $N=K-N$, *dus als* $N=\frac{K}{2}$. *Als het aantal duiven nog meer toeneemt en de draagkracht nadert, daalt de groeisnelheid tot* 0.*)*



9. Verklaar waarom deze evolutie van de absolute groeisnelheid klopt met de realiteit.

   (Als er weinig duiven zijn, kan er weinig voortgeplant worden en is de (absolute) groeisnelheid laag. Naarmate er meer duiven komen zal de (absolute) groeisnelheid toenemen. Deze stijging van de (absolute) groeisnelheid blijft niet doorgaan. Hoe meer het aantal duiven tot de draagkracht nadert, hoe lager het aantal nakomelingen per duif. Daardoor vertraagt de groei.)

In wat volgt vragen we ons af welke groeifunctie $N(t)$ aan de gestelde voorwaarden voldoet. We kunnen de uitdrukking

$$\frac{dN}{dt}=r_{\mathrm{m}}N\frac{K-N}{K}$$

opvatten als een vergelijking met de functie $N(t)$ als onbekende. In deze vergelijking treden zowel de onbekende functie zelf als haar afgeleide op. Een dergelijke vergelijking noemen we een *differentiaalvergelijking*. We zullen deze differentiaalvergelijking nu oplossen om te achterhalen wat het voorschrift is van de groeifunctie *N(t)*.

Oplossen van de logistische differentiaalvergelijking

In tegenstelling tot de recursievergelijking is de differentiaalvergelijking wel analytisch op te lossen. De oplossingsmethode is toegankelijk voor 6-uursleerlingen. Het oplossen van de differentiaalvergelijking kan herleid worden tot het berekenen van twee integralen.

Ook als je je leerlingen de differentiaalvergelijking niet laat oplossen zoals in wat volgt beschreven is, blijft het zinvol iets over logistische groei te doen. Er zijn dan nog verschillende mogelijkheden. Je kunt de differentiaalvergelijking laten oplossen (met Derive of een TI89 bijvoorbeeld). Een andere mogelijkheid is dat je de oplossing aan de leerlingen geeft en hen laat controleren dat het klopt.

Wat hieronder beschreven is, hebben we in de klas aangeboden als onderdeel van het keuzeonderwerp differentiaalvergelijkingen. We hadden het onderwerp ‘oplossen van integralen met partieelbreuken’ niet behandeld. Dat leverde geen problemen op.

De differentiaalvergelijking

$$\frac{dN}{dt} = r_m N \frac{K-N}{K}$$

kan geschreven worden in de vorm

$$N'(t) = r_{\mathrm{m}} N(t) \frac{K-N(t)}{K}$$

en herschreven worden als

$$\frac{KN'(t)}{N(t)(K-N(t))} = r_{\mathrm{m}} .$$

Wanneer we beide leden integreren, wordt dit

$$\int \frac{KN'(t)}{N(t)(K-N(t))} dt = \int r_{\mathrm{m}} dt .$$

Door substitutie $u = N(t)$, $du = N'(t)dt$ toe te passen, wordt de integraal in het linkerlid:

$$\int \frac{K}{u(K-u)} du .$$

De vergelijking wordt nu:

$$\int \frac{K}{u(K-u)} du = \int r_{\mathrm{m}} dt .$$

De integraal in het rechterlid is heel gemakkelijk te berekenen:

$$\int r_{\mathrm{m}} dt = r_{\mathrm{m}} t + c_1 .$$

De integraal in het linkerlid lossen we als volgt op:

- We zoeken getallen *a* en *b* zo dat $\frac{K}{u(K-u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{K-u}$ en vinden $a=1$ en $b=1$.
- We splitsen de integraal nu in twee eenvoudige integralen die we gemakkelijk kunnen berekenen:

$$\int \frac{Kdu}{u(K-u)} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{K-u} = \ln|u| - \ln|K-u| + c_2 = \ln\frac{|u|}{|K-u|} + c_2$$

We voeren de substitutie $u = N(t)$ terug uit. We gaan ervan uit dat het aantal duiven kleiner is dan de draagkracht en bijgevolg zijn zowel N als $K-N$ positief.

De functie die we zoeken, voldoet aan

$$\ln\frac{N(t)}{K-N(t)} + c = r_{\mathrm{m}} t$$

(met $c = c_2 - c_1$). Dit voorschrift stelt oneindig veel functies voor omdat c een willekeurig getal voorstelt. Al deze functies zijn oplossingen van de differentiaalvergelijking. Samen vormen ze de *algemene oplossing* van de differentiaalvergelijking. De oplossing wordt door dit voorschrift gegeven in *impliciete vorm*.

Om de onbekende functie te vinden, moeten we enkel nog $N(t)$ oplossen uit deze vergelijking. We moeten op zoek gaan naar een voorschrift in *expliciete vorm:*

$$\ln\frac{N}{K-N}+c=r_{\mathrm{m}}t \quad\Leftrightarrow\quad \frac{N}{K-N}=e^{r_{\mathrm{m}}t-c}$$

$$\Leftrightarrow\quad N=\frac{Ke^{r_{\mathrm{m}}t-c}}{1+e^{r_{\mathrm{m}}t-c}} \quad\Leftrightarrow\quad N=\frac{K}{1+e^{c-r_{\mathrm{m}}t}} \qquad (1)$$

De functie die een goede beschrijving geeft van de groei van de populatie duiven, heeft dus een voorschrift van de vorm (1). Om de functie volledig te kennen moeten we enkel nog de waarde van het getal c bepalen.

De constante c in de differentiaalvergelijking kan bepaald worden indien er op een bepaald moment een telling gedaan wordt van het aantal duiven. Veronderstel dat er 10 duiven geteld worden op het tijdstip $t=0$ in een gebied met draagkracht $K=100$ en intrinsieke groeisnelheid $r_{\mathrm{m}}=0{,}5$, dan is

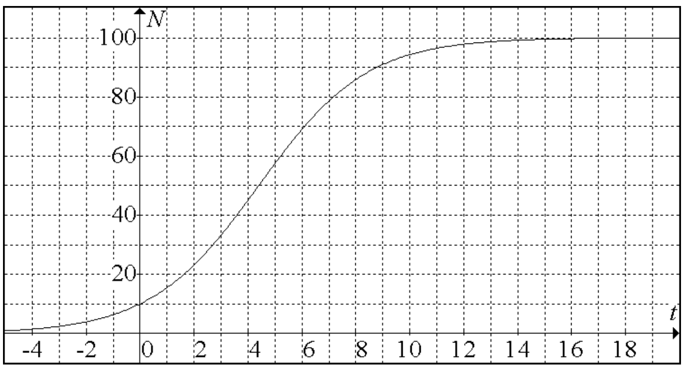
$$10=\frac{100}{1+e^{c}}\Leftrightarrow 1+e^{c}=10\Leftrightarrow c=\ln 9\,.$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking die aan de voorwaarde $N(0)=10$ voldoet, heeft dus als voorschrift:

$$N(t)=\frac{100}{1+e^{\ln 9-0{,}5t}}=\frac{100}{1+9e^{-0{,}5t}}\,.$$

Het is de *particuliere oplossing* van de differentiaalvergelijking die aan de *beginvoorwaarde* $N(0)=10$ voldoet.

We noemen de functie met het bovenstaande voorschrift een *logistische groeifunctie*. Zij heeft de volgende grafiek, die in de biologie een *S-vormige groeicurve* of *sigmoïde* genoemd wordt.



Het voorschrift (1) kan dus geschreven worden in de vorm

$$N(t)=\frac{K}{1+Ae^{-r_{\mathrm{m}}t}}\,. \quad (2)$$

Hierbij stelt A een strikt positief getal voor omdat het de uitdrukking e^{c} vervangt. De beginvoorwaarde $N(0)=N_0$ geeft de ingrediënten om A te bepalen. Het voorschrift (2) wordt dan

$$N = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-r_m t}}\,.$$

Om een model op te stellen van de groei van een populatie duiven hielden we rekening met de draagkracht (*K*) van een bepaalde omgeving om het exponentiële groeimodel aan te passen. Dit gaf het logistisch groeimodel. Natuurlijke populaties volgen slechts zelden perfect de bovenstaande modellen. Het logistische model voorspelt bijvoorbeeld dat de draagkracht geleidelijk bereikt wordt, maar in werkelijkheid neemt men dikwijls een tijdelijke overschrijding van *K* waar, gevolgd door een vrij scherpe terugval. De oorzaak hiervan is dat een schaars wordende hulpbron weliswaar de reproductie zal beperken, maar niet onmiddellijk leidt tot een vermindering van de geboortesnelheid. Vele organismen bezitten immers een energievoorraad, waaruit zij in tijden van schaarste putten om zich voort te planten. Dit laatste zullen we echter niet meer in rekening brengen in het model.
In de bovenstaande formule herken je zeker de functie die we vonden in deel 1 wanneer we logistische regressie toepasten op de stadia van de kikkers. De functie die we vonden was:

$$y = \frac{7{,}53}{1 + 16e^{-0{,}00055x}}$$

Degenen die nog verder willen grasduinen in de logistische kromme kunnen hun hartje verder ophalen door het artikel over ‘Logistische groei’. Hier komt o.a. het verloop van de functie nog aan bod. Dit wordt echter niet op de klassieke manier besproken. De differentiaalvergelijking zelf geeft ons heel wat informatie over het verloop van de functie. Ze hoeft bijgevolg niet per se opgelost te worden om toch een idee te krijgen over de grafiek van de functie die eraan voldoet. Het stijgen en dalen kan o.a. op een eenvoudige manier met behulp van de differentiaalvergelijking onderzocht worden. Deze differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = r_m N \frac{K - N}{K}$ geeft een uitdrukking voor de afgeleide $\frac{dN}{dt}$ of $N'(t)$ van de functie $N(t)$.
Het rechterlid bestaat uit een product van drie factoren waarvan er twee zeker positief zijn: het aantal duiven $N(t)$ is uiteraard positief en $\frac{K - N(t)}{K}$ is positief omdat er volgens dit ideale model nooit meer duiven zijn dan de draagkracht van een gebied. Het teken van $N'(t)$ hangt dus enkel af van r_m. Als r_m positief/negatief is stijgt/daalt de functie.

Het voorschrift van de logistische functie $N(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-r_m t}}$ bevat een aantal parameters. De invloed van deze parameters komt in het artikel aan bod.

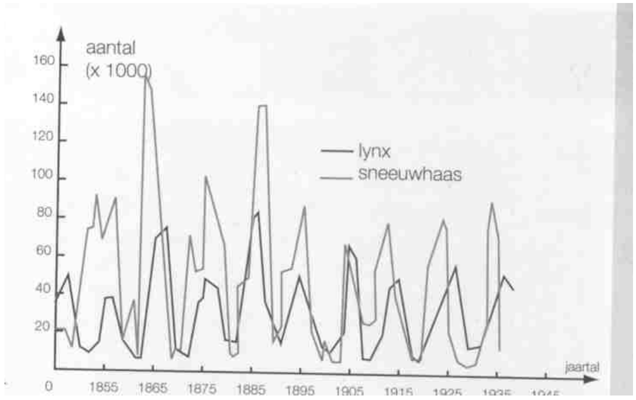
Tenslotte wordt de kromme nog eens bekeken en worden drie groeifasen onderscheiden: een eerste stukje exponentieel, een stukje lineair en een stukje exponentieel geremd.

Er zijn nog talrijke toepassingen te vinden van logistische groei. Op het net vonden we een examenvraag over Ransuilen in een examenbundel van de Nederlandse onderwijspers. De groei van een zonnebloem wordt in bepaalde klassen experimenteel opgevolgd. De kromme vertoont gelijkenissen met een S-vormige curve, met een logistische kromme. Het gewicht van kokmeeuwen uitgezet tegen de tijd in jaar geeft in heel wat gevallen een S-vormige curve…

2.2.3 De sinusoïde

‘Uilen beginnen onmiddellijk te broeden vanaf het eerste ei, waardoor de jongen één voor één uitkomen. Het eerst uitgekomen uilskuiken zal het meest om voedsel bedelen en dus eerst gevoed worden. In een goed ‘muizenjaar’ worden ook het tweede, derde en zelfs vierde jong goed gevoed. Gevolg: veel uilen dat jaar.

Maar: hoe meer uilenjongen groot worden, hoe meer muizen gevangen zullen worden en het daarop volgende jaar wordt dan een slecht 'muizenjaar'. Gevolg voor de uilen? Alleen de eerste jongen worden dat jaar goed gevoed en de andere komen om, dan zijn er weinig uilen. Zijn er weinig uilen, dan komen er weer veel muizen en de cyclus kan opnieuw beginnen. Hetzelfde blijkt nog duidelijker uit het verband tussen de schommelingen in aantal van de Amerikaanse sneeuwhaas en zijn roofvijand, de lynx, in Canada.'



De algemene sinusfunctie levert een eenvoudig model om de bovenstaande evolutie van een populatie te beschrijven. In de onderstaande werktekst worden twee oefeningen aangeboden. De eerste neemt als thema de uilen en de muizen en is gebaseerd op een oude examenvraag waarvoor ik inspiratie haalde in een Nederlands boek uit de Sigma reeks. De tweede is integraal overgenomen uit het handboek 'Van basis tot limiet 5'

Werktekst 1: Prooi-roofdier-model.

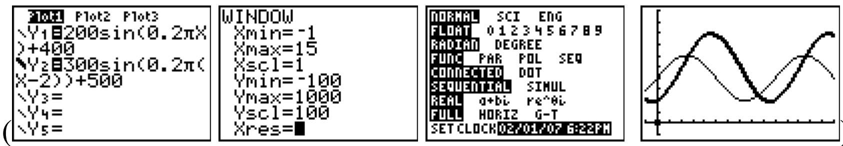
Een prooi-roofdier-cyclus wordt beschreven door de functies

$N_1(t) = 200\sin\left(0,2\pi t\right) + 400$ (aantal prooidieren)

$N_2(t) = 300\sin\left(0,2\pi\left(t-2\right)\right) + 500$ (aantal roofdieren)

Hierbij wordt de tijd t uitgedrukt in jaren.

1. Teken de grafieken van het aantal prooidieren en van het aantal roofdieren als functie van de tijd.

   (
)

2. Bepaal de periode van de cyclus.

   (*10 jaar)*

3. Bepaal wanneer er 500 prooidieren zijn gedurende één periode.

   (Na 10 maanden en na 4 jaar en 2 maand zijn er 500 prooidieren)

4. Bepaal hoeveel roofdieren er dan zijn. Indien je vraag 3. niet vond, bepaal je het aantal roofdieren als $t = 3$.

   (*Na 10 maand zijn er ongeveer 299 roofdieren. Na 4 jaar en 2 maand zijn er ongeveer 793 roofdieren.)*

5. Bepaal wanneer er binnen één periode evenveel prooidieren als roofdieren zijn.

   (Om deze vraag op te lossen moeten de snijpunten van de twee kromme bepaald worden. Dit kan weer m.b.v. de GRM door `[2ND CALC]` *te gebruiken.)*

6. Bepaal hoelang er binnen één periode meer dan 600 roofdieren zijn.

   (Ook deze vraag kan men oplossen door snijpunten te bepalen, nl. van de kromme van de roofdieren en de horizontale rechte door 600.)

7 Bepaal rond welke waarden beide populaties zweven volgens dit model.

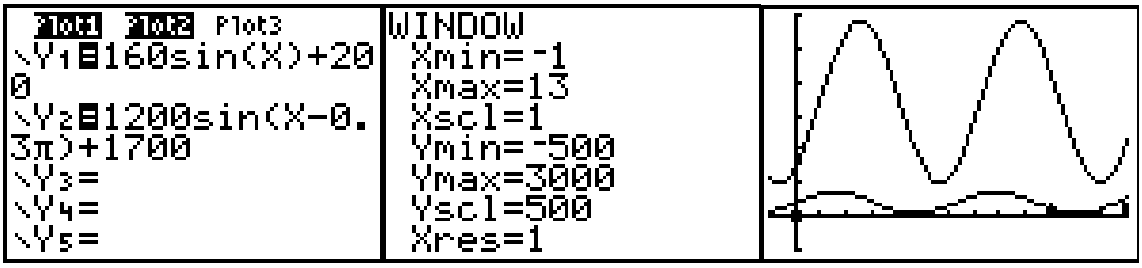
   (De prooidieren zweven rond de 400 en de roofdieren rond de 500)

Werkteskt 2: konijnen en vossen

In een bepaald gebied in Wales zijn konijnen een prooi voor het roofdier vos. De populatie kan gevolgd worden aan de hand van de volgende functievoorschriften:

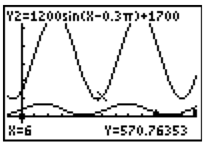
de populatie vossen: $N_1(t) = 160\sin\left(t\right) + 200$

de populatie konijnen: $N_2(t) = 1200\sin\left(t - 0{,}3\pi\right) + 1700$



1. Hoeveel konijnen en hoeveel vossen zijn er op 1 januari 2006?

   ($N_1(6) = 155{,}29352,\ N_2(6) = 570{,}76353$. *Er zijn dus* 155 *vossen en* 570 *konijnen.)*



2. Gedurende welke periode tussen 1 januari 2000 en 1 januari 2006 zijn er meer dan 300 vossen?

   (*Door de doorsnede te nemen van de grafiek van de vossen met de rechte* y=300 *vinden we twee snijpunten met als t-waarde:* 0,6751353 *en* 2,4664611. *De tijd is hier uitgedrukt in jaar.* 0,6751353 *komt overeen met* 3 *september* 2000 *en* 2,4664611 *komt overeen met* 19 *juni* 2002. *Tussen* 3 *september* 2000 *en* 19 *juni* 2002 *zijn er bijgevolg meer dan* 300 *vossen.)*

3. Gedurende welke periode tussen 1 januari 2000 en 1 januari 2006 zijn er minder dan 800 konijnen?

   (Op analoge manier als in vraag drie vind men dat er tussen 0 *en* 0,0944 *en* 4,9321 *en* 6,2776. *Deze laatste waarde mag afgerond worden naar* 6 *omdat we niet verder onderzoeken dan* 1 *januari* 2000. *Deze tijdstippen komen overeen met de volgende dagen: Tussen* 1 *januari* 2000 *en* 3 *februari* 2000 *en tussen* 6 *december* 2004 *en* 1 *januari* 2006 *zijn er minder dan* 800 *konijnen.)*

3 Ideale maten

‘Sommige mensen zijn pas gelukkig wanneer ze getallen kunnen plakken op omschrijvingen. Zo kun je met een getal aanduiden of je te dik, te mager of juist volmaakt bent.’

Deze tekst uit Bioskoop 5/6 vormt de aanleiding om over de body-mass index (BMI) en de waist-hip ratio (WHR) te spreken. Hij hoort thuis in het hoofdstuk over gezonde voeding.

BMI behoort in geen enkel net tot de leerstof biologie. Het kan echter wel gebruikt worden om de lessen over voeding wat interessanter voor de leerlingen te maken. Het gaat hier over leerlingen van een derde graad ASO. In de verschillende TSO - richtingen ligt dit moeilijker.

In de eerste werktekst gebruiken we de BMI. Er zullen eerste-, tweede- en derdegraadsuitdrukkingen aan bod komen. Deze onderwerpen komen voor in alle leerplannen wiskunde van zowel vrij als gemeenschapsonderwijs. Meestal zullen ze in de tweede graad aan bod komen. In sommige richtingen vinden we het onderwerp ‘tweedegraadsfuncties’ pas in de derde graad. Als je het snijpunt van een rechte en parabool enkel grafisch laat berekenen, kan je de opgave zelfs aan bod komen vooraleer tweedegraadsfuncties grondig behandeld zijn.

Analoge opgaven kunnen echter uitgewerkt worden voor de WHR, soms oneerbiedig de *perfect ass index* genoemd. Het is de verhouding tussen de taille en de heupomtrek.

‘Meet – bij een rechtopstaande persoon – de omtrek van de buik ter hoogte van de navel en van de heupen op hun breedste punt. Deel de buikomtrek door de omtrek van de heupen. Bij volwassen mannen moet de verhouding kleiner zijn dan 1, anders bestaat er een reëel gezondheidsrisico. Vrouwen moeten onder 0,85 blijven. Is je WHP 0,70 dan ben je (volgens kenners) ‘top of the bill’.’

Noem de buikomtrek x, de heupomtrek h en de WHP y. De vergelijking $y = \frac{x}{h}$ is een eerstegraadsfunctie waarop je je fantasie kan loslaten. Ideeën vind je in de onderstaande werktekst.

Werktekst 1: Ik ben niet te dik, ik ben te klein

In sommige landen vindt men dikke mensen mooi. Het is een teken van vruchtbaarheid en rijkdom. Bij ons is slank zijn eerder een schoonheidsideaal. Heel dik of heel mager zijn, is natuurlijk niet goed voor je gezondheid. Maar wat is het ideale gewicht? Er bestaan vele formules om dit ideale gewicht te berekenen. We bespreken er hier enkele.

We merken vooraf op dat de meeste formules die we hier gebruiken enkel gelden voor volwassenen of jongeren die ouder zijn dan 16 jaar. De verhoudingen tussen gewicht en lengte zijn anders bij kinderen en jongeren die nog volop in hun groeiproces zitten.

Het is logisch dat je je gewicht moet vergelijken met je lengte. De meest eenvoudige formule voor je ideale gewicht is:

$$\text{gewicht (in kg)} = \text{lengte (in cm)} - 100$$

1. Ga na of deze formule voor jou klopt.
2. Vermeld enkele nadelen van deze formule.

   (o.a. ‘Het’ ideale gewicht bestaat niet, meestal werkt men met een marge. Bij sommige voorbeelden lijkt de formule niet ideaal: iemand van 1,70 *m zou als ideale gewicht* 70 *kg hebben, wat eerder iets te veel lijkt. Het lijkt ook vreemd dat per* 10 *cm extra lengte er altijd exact* 10 *kg gewicht mag bijkomen.)*

Een betere manier om je ideale gewicht te kennen, is gebruik te maken van de *body-mass-index* (BMI):

$$\text{BMI} = \frac{\text{gewicht (in kg)}}{\text{lengte}^2\,(\text{in m}^2)}$$

Deze index wordt ook *Quételet-index* genoemd, naar de Belg Adolphe Quételet (1796 – 1874), die in 1835 een werk publiceerde over de 'gemiddelde' mens.

3. Bereken de BMI van Peter die 170 cm meet en 65 kg weegt.

   ($\frac{65}{1{,}7^2} = 22{,}49$ *)*

4. Bereken je eigen BMI.
5. Vergelijk je resultaat met de volgende tabel:

BMI < 18	ondergewicht
18 ≤ BMI < 25	normaal gewicht
25 ≤ BMI < 27	neiging tot overgewicht
27 ≤ BMI < 30	overgewicht
30 ≤ BMI < 40	zwaarlijvigheid (obesitas)
40 ≤ BMI	ernstige zwaarlijvigheid

Een te lage of te hoge BMI-waarde is slecht voor je gezondheid. Omdat je niets kan veranderen aan je lichaamslengte, moet je in dat geval zorgen dat je gewicht toeneemt of afneemt.

Noem je (constante) lichaamslengte *k*, je veranderlijke gewicht *x* en de BMI *y*. De formule wordt dan:

$$y = \frac{x}{k^2}.$$

6. Welk soort functie is dit? Hoe ziet de grafiek er dus uit?

   (Dit is een eerstegraadsfunctie. De grafiek is dus een rechte.)

7. Peter (uit vraag 3) wil weten wat zijn minimum en maximum 'normaal' gewicht is. Bepaal deze minimum- en maximumgrens grafisch.

   (Zoek de snijpunten van de functies: $y_1 = \frac{x}{1{,}7^2}$, $y_2 = 18$, $y_3 = 25$. *Je vindt* 52,02 *en* 72,25.

   Peter moet dus zwaarder wegen dan 52kg en lichter dan 72,25kg)

8. Je kunt deze grenzen ook algebraïsch bepalen door vergelijkingen op te lossen. Doe dit en controleer je resultaten met de antwoorden bij vraag 7.

   ($18 = \frac{x}{1{,}7^2}$, *dus* $x = 18 \cdot 1{,}7^2 = 52{,}02$ *en* $25 \cdot 1{,}7^2 = 72{,}25$ *)*

9. Wanneer is iemand die dezelfde lengte heeft als jij te mager (ondergewicht)? Schrijf de ongelijkheid op die hierbij hoort en los die algebraïsch op.

   (De berekening hangt af van de leerling die dit oplost. Stel dat de leerling een lengte heeft van 170 *cm. Als het BMI kleiner is dan* 18, *spreken we van ondergewicht. We moeten de ongelijkheid oplossen:* $18 > \frac{x}{1{,}7^2}$. *Deze ongelijkheid heeft als oplossing:*

   $52.02 > x$. *Iemand die dus minder dan* 52 *kg weegt is te mager.)*

10. Wanneer is iemand met dezelfde lengte als jij ‘ernstig zwaarlijvig’ (zie tabel BMI)? Los ook die ongelijkheid algebraïsch op.

    (De berekening hangt af van de leerling die dit oplost. Stel dat de leerlingen een lengte heeft van 170 *cm. Als het BMI groter is dan* 40*, spreken we van ‘ernstige zwaarlijvigheid’. We moeten de ongelijkheid oplossen:* $40 < \frac{x}{1,7^2}$. *Deze ongelijkheid heeft als oplossing:* $115,6 < x$. *Iemand die dus meer dan* 115,6 *kg is ‘ernstig zwaarlijvig’.)*

11. Vragen 9 en 10 kan je ook grafisch oplossen. Hoe doe je dit?

    (Bepaal de snijpunten van de functies: $y_1 = \frac{x}{k^2}$ *(k = eigen lengte in m),* $y_2 = 18$ *en* $y_3 = 40$. *Waar ligt de grafiek van* y_1 *onder de grafiek van* y_2 *en waar ligt ze boven de grafiek van* y_3 *?)*

We schrijven de formule voor BMI in een vorm die lijkt op de eerste formule (zie boven vraag 1), zodat we nadien de twee formules kunnen vergelijken.

12. Herschrijf de formule voor BMI in een vorm die het gewicht uitdrukt in functie van de lengte.

    (gewicht = BMI · lengte^2*)*

13. Welk soort functie krijg je nu als je BMI constant zou blijven en je lengte varieert?

    (een tweedegraadsfunctie)

14. Laat je grafisch rekenapparaat of computer op éénzelfde assenstelsel de grafieken plotten die horen bij een BMI van 18 en van 25. Zorg dat je de grafieken mooi in beeld krijgt en dat de waarden op de *x*-as (lengte) en *y*-as (gewicht) realistisch gekozen zijn.

    (Laat de x-waarden bv. variëren tussen 0 *en* 2 *de meeste mensen zijn niet langer dan 2 m en de y-waarden bv. tussen* 0 *en* 120*, de meeste mensen zullen ook niet zwaarder zijn dan* 120 *kg)*

15. Ga op de eerste grafiek op het punt met *x*-coördinaat 1,65 staan. Wat is de bijbehorende *y*-coördinaat en wat is hiervan de betekenis?

    (y = 49,005. *Iemand met een lengte van* 1,65 *m en een BMI van* 18 *heeft een gewicht van* 49,005 *kg.)*

16. Neem dan het punt op de tweede grafiek met *x*-coördinaat 1,65. Wat is nu de bijbehorende *y*-waarde en betekenis?

    (y = 68,0625. *Iemand met een lengte van* 1,65 *m en een BMI van* 25 *heeft een gewicht van* 68,0625 *kg.)*

17. Wat stelt het gebied tussen deze krommen voor?

    (Het gebied dat overeenkomt met een ‘normaal’ gewicht.)

18. Laat je grafisch rekenapparaat of computer op éénzelfde assenstelsel de grafieken plotten die horen bij een BMI van 18, 25, 27, 30 en 40 (de grenswaarden uit de tabel).

19. Deze grafieken verdelen het *xy*-vlak in stroken. Geef een interpretatie voor elke strook.

    (De stroken geven gebieden aan die horen bij (van onder naar boven): ‘ondergewicht’, ‘normaal gewicht’, ‘neiging tot overgewicht’, ‘overgewicht’, ‘zwaarlijvigheid’ en ‘ernstige zwaarlijvigheid’.)

We willen nu de eerste formule (gewicht = lengte − 100) en de tweede formule (gewicht = BMI · lengte ^{2}) met elkaar vergelijken via hun grafieken.

20. De eenheid voor lengte in de eerste formule is centimeter, terwijl je in de BMI-formule rekent met meter. Pas het voorschrift van de eerste formule aan zodat de lengte x ook hier in meter wordt uitgedrukt.

    ($y = 100x - 100$ *.)*

21. Voeg de grafiek van die functie (eerste formule) toe aan de twee grafieken die horen bij een BMI van 18 en 25 (tweede formule).

22. Voor welke lengtes geven de eerste en tweede formule een vergelijkbaar resultaat ('ideale' gewicht uit eerste formule = 'normaal' gewicht voor tweede formule)? Bepaal deze grenzen grafisch.

    (Snijpunten bepalen van $y_1 = 100x - 100$ *met* $y_2 = 18 \cdot x^2$ *en* $y_3 = 25 \cdot x^2$*. Je vindt x =* 1,3 *en x =* 2*. Voor lengtes tussen* 1,3 *m en* 2 *m geven de twee formules een vergelijkbaar resultaat. Merk op dat de meeste mensen (ouder dan* 16 *jaar) een lengte hebben die tussen deze grenzen valt.)*

23. Reken deze grenswaarden algebraïsch na.

    (Los de tweedegraadsvergelijkingen: $100x - 100 = 18x^2$ *en* $100x - 100 = 25x^2$ *op. De oplossingen van de eerste vergelijking zijn* 1,31 *en* 4,25*. De tweede vergelijking heeft maar één oplossing nl.* 2*. De tweede oplossing van de eerste vergelijking kunnen we niet gebruiken.)*

24. Je ziet dat de rechte (eerste formule) sterk aanleunt bij de tweede parabool (tweede formule, BMI van 25). Geef hiervoor een interpretatie.

    (Dit betekent dat de eerste formule als 'ideaal' gewicht een waarde geeft die volgens de tweede formule op de grens ligt tussen 'normaal gewicht' en 'neiging tot overgewicht'.)

In de eerste formule was het gewicht (y) een *eerstegraads*uitdrukking van de lengte (x): $y = 100x - 100$. Bij de tweede formule was het gewicht, bij vaste BMI, evenredig met het *kwadraat* van de lengte: $y = \mathrm{BMI} \cdot x^2$. Toch zijn mensen geen tweedimensionale figuren! Je zou verwachten dat het gewicht evenredig is met een volume, een *derde* macht dus. We onderzoeken nu waarom bij de berekening van een 'gezond' gewicht geen derde macht voorkomt.

25. Peter meet 1,60 m en weegt 64 kg. Bereken zijn BMI.

Boris is veel groter: hij meet 2 m. Hij is dus 25% groter dan Peter of anders gezegd: als je de lengte van Peter vermenigvuldigt met 1,25 dan verkrijg je de lengte van Boris. Veronderstel nu dat Boris 'dezelfde vorm' heeft als ('gelijkvormig' is met) Peter. Dan verwacht je dat ook zijn 'breedte' en 'diepte' ('dikte') met 1,25 vermenigvuldigd worden.

26. Bereken dan het gewicht van Boris, als je weet dat gewicht evenredig is met volume.

    ($64 \cdot 1{,}25^3 = 125$*, Boris zou dan* 125 *kg wegen.)*

27. Dit lijkt veel. Bereken de BMI van Boris.

    ($125 / 2^2 = 31{,}25$ *)*

Zoals uit je berekeningen blijkt, situeert Peter zich op de grens van een 'normaal' gewicht, maar Boris lijdt aan 'zwaarlijvigheid'.

Als je groeit en toch een 'gezond' gewicht wil houden, mag je 'breedte' en 'diepte' ('dikte') dus niet met hetzelfde percentage toenemen. Of anders geformuleerd: mensen met een zelfde BMI zijn niet gelijkvormig!

4 Modificatie

Toen Sabine het artikel ‘Phyllotaxis, Fibonacci en de gulden snede’ las in Uitwiskeling, las ze verder en vond er een ‘Onder de loep’ over Lineaire regressie. Eén van de voorbeelden handelt over lengte en schoenmaten. Ook in de Biologie is er een practicum over schoenmaten.

Het thema Phyllotaxis hebben we niet opgenomen, omdat het niet in de leerplannen vermeld wordt. Het is nochtans een mooi thema voor de Vrije Ruimte. Er bestaat heel wat lectuur over.

We nemen hieronder wel de ideeën i.v.m. de schoenmaten over.

4.1 De schoenmaatproef in de les biologie

De schoenmaatproef vind je terug in de leerplannen voor de derde graad ASO, zowel in het katholieke net als in het gemeenschapsonderwijs. Het is materiaal voor een practicum. De onderstaande tekst vonden we in een werkboek Biologie.

Stappen

- Verzamel de vooraf genoteerde schoenmaten van alle leden van de werkgroep in een rekenblad. Maak hiervoor een tabel waarbij je de schoenmaten rangschikt van klein naar groot en de aantallen noteert. Doe dit voor alle schoenmaten. Maak nadien een tweede tabel, waarin je de schoenmaten van de mannen noteert. Doe hetzelfde voor de resultaten bij de vrouwen.

- Stel de resultaten grafisch (x-as schoenmaat, y-as aantal) voor. Maak drie grafieken:
  a: aantal /alle schoenmaten
  b: aantal/ schoenmaten van de vrouwen
  c: aantal/schoenmaten van de mannen

Opdracht

1. Bekijk de resultaten van mannen en vrouwen samen. Wat stel je vast?
   (Alle resultaten geven een curve met twee toppen.)
2. Bekijk de resultaten van mannen en vrouwen afzonderlijk. Welke kromme bekom je? Wat kun je besluiten uit de grafieken?
   (Je bekomt telkens een Gausscurve. De top ervan ligt voor de meisjes bij een kleinere schoenmaat als voor de jongens. Jongens hebben dus gemiddeld grotere voeten als meisjes.)

4.2 De schoenmaatproef in de les wiskunde

De schoenmaatproef kan gebruikt worden in een les statistiek over de normale verdeling. De gegevenset zou dan wel omvangrijker moeten zijn dan de waarden waarmee we in de onderstaande werktekst werken. Deze werktekst behandelt lineaire regressie. In de eindtermen vind je het onderwerp ‘lineaire regressie’ niet terug. In heel wat leerplannen in TSO en ASO vind je het terug in zowel vrij als gemeenschapsonderwijs. Op het ene leerplan komt het voor als verplicht onderwerp, op het andere leerplan wordt het als keuzeonderwerp aangeboden.

De studie van lineaire regressie bestudeert de samenhang tussen gekoppelde gegevens.

Werktekst: Lengte en schoenmaat

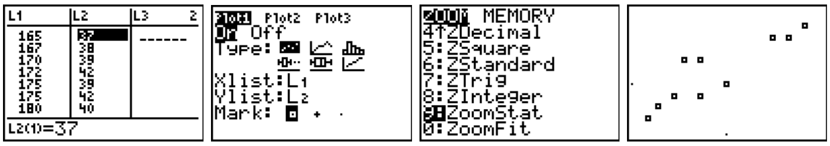
Om te onderzoeken of er een verband bestaat tussen de lengte en de schoenmaat van personen heb je gegevens nodig.

1. Denk je dat er een verband is tussen de lengte en de schoenmaat?

Hieronder vind je de lengte en de schoenmaat van 10 jongens. De gegevens komen van een (oude) militaire keuring.

Lengte	165	167	170	172	175	175	180	189	192	195
Schoenmaat	37	38	39	42	39	42	40	44	44	45

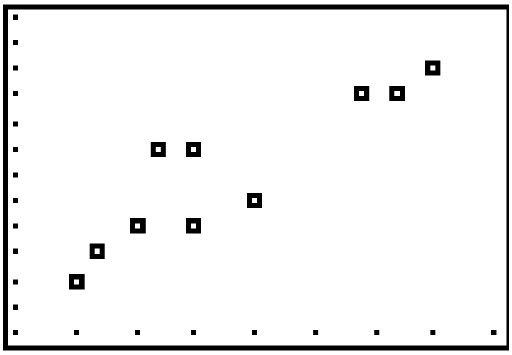
2. Voer deze gegevens in in je grafisch rekentoestel (bijvoorbeeld in L_1 en L_2) en laat je rekentoestel een spreidingsdiagram tekenen. (Vergeet niet de gewone functies op je GRM uit te zetten Y=.)



De verschillende punten op het spreidingsdiagram vormen een puntenwolk. Puntenwolken hebben een globale vorm. Op basis hiervan kan je eerste besluiten trekken over een mogelijke samenhang.

De punten uit de bovenstaande set gegevens, liggen duidelijk zeer dicht bij een rechte. Vandaar dat we spreken van *lineaire samenhang*.

3. Schets op het spreidingsdiagram de rechte die volgens jou het verband het beste weergeeft.



Als de rechte stijgend is, spreken we van een *positief lineair verband*. Bij een *negatief lineair verband* hoort bijgevolg een dalende rechte.

4. Wat is hier de richting van de puntenwolk? Welk soort verband is er? Leg in woorden uit wat de betekenis is van dit verband voor de dataset van de schoenmaten.

   (De richting is stijgend. Er is een positief lineair verband. Bij een grote lengte hoort een grote schoenmaat.)

5. De richtingscoëfficiënt van de rechte is een getal dat een maat is voor de richting van de rechte. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte die jij tekende. De eenheid op de horizontale as is 5 cm, op de verticale as 1. Wat betekent deze richtingscoëfficiënt voor het verband tussen de lengte en de schoenmaat van de kandidaat-soldaten?

   (Het resultaat varieert per leerling. Als je het eerste punt met het laatste verbindt, teken je een rechte. Je vindt als richtingscoëfficiënt $\frac{45-37}{195-165}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$. *Als de lengte met* 1 *cm*

toeneemt, neemt de schoenmaat met 0,27 *toe. Dit kan in de realiteit niet, we drukken het bijgevolg anders uit: Als de lengte met* 3,75 *cm toeneemt, neemt de schoenmaat met* 1 *toe.)*

6. Geef de vergelijking van de rechte die jij tekende.

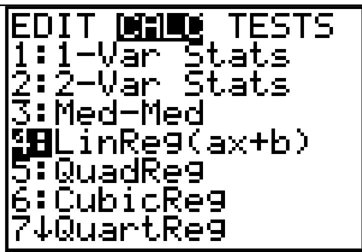
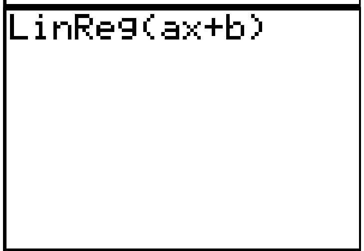
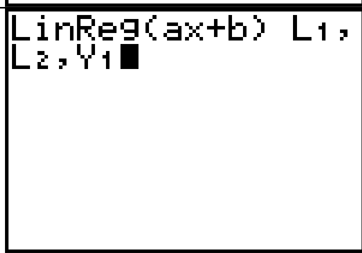
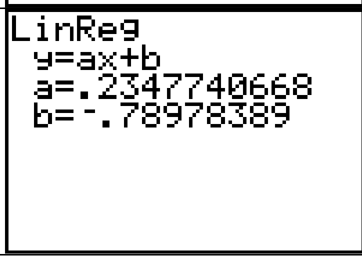
   (Resultaat varieert per leerling. De vergelijking van de rechte door het eerste en het laatste punt is: $y = \frac{4}{15}x - 7 \Leftrightarrow y = 0{,}27x - 7$ *.)*

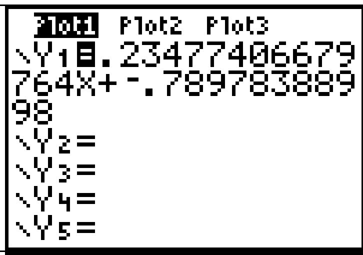
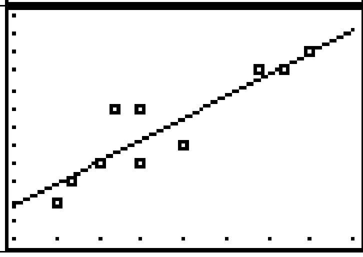
7. Wat is een ‘normale’ schoenmaat voor iemand met jouw lengte?

   (Resultaat varieert per leerling. Een leerling met lengte 172 *cm, heeft ‘normale’ schoenmaat* 39*)*

8. Vergelijk je rechte met die van andere leerlingen. Heeft iedereen dezelfde rechte? Voorspel nu de schoenmaat voor iemand met lengte 172 cm. Voorspelt iedereen dezelfde schoenmaat?

Je rekenmachine kan ook zo’n rechte bepalen (we maken ons voorlopig geen zorgen over de manier waarop de rekenmachine de rechte bepaalt). Ze wordt de *regressierechte* genoemd. Het gaat als volgt:

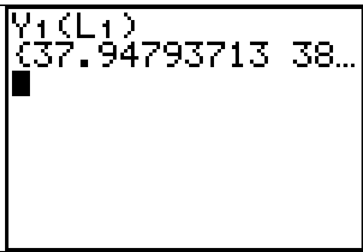
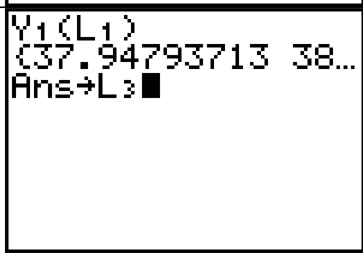
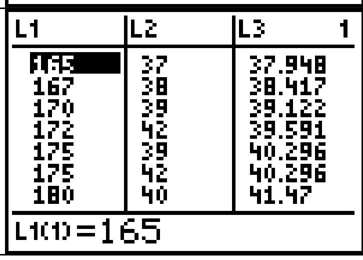
Druk `[STAT]` en ga via de pijltjestoets naar het `[CALC]` menu Ga m.b.v. de pijltjestoetsen naar `[4: LinReg(ax+b)]` en druk `[ENTER]`	 	
Druk `[2nd L1]` en `[2nd L2]` Druk `[VARS]` en beweeg de cursor naar `[Y-VARS]` Kies `[1: Function]` door op `[ENTER]` te drukken Kies `[1: Y1]` en druk `[ENTER]`		
Druk nogmaals `[ENTER]` om de lineaire functie te vinden die het meest overeenstemt met de waarden in L_1 en L_2. Deze wordt tevens opgeslagen in de functie Y_1		

	
Druk op [GRAPH] om de grafiek te zien, tezamen met de waarden	

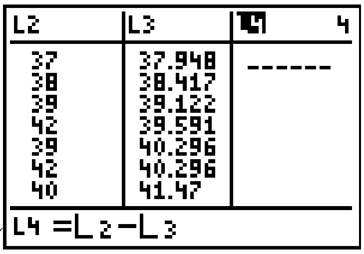
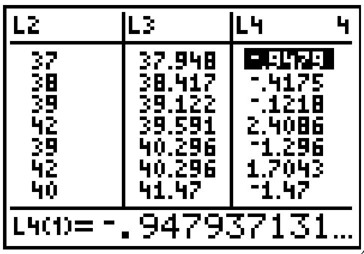
9. Gebruik nu de regressierechte van je rekentoestel om vraag 7 en 8 te beantwoorden. Zat je eigen voorspelling dicht bij de resultaten van je rekentoestel?

   (Voor een persoon met lengte 172 *cm, vind je m.b.v. de regressierechte schoenmaat* 39,5*)*

We kunnen bij elke lengte van de gegeven data de schoenmaat voorspellen m.b.v. de regressievergelijking. Dit gaat eenvoudig met je rekentoestel.

Maak de lijst [Y1(L1)] en druk [ENTER]	
Sla deze lijst op in [L3]	
Via [STAT], [1:Edit] vind je de lijsten met de lengte, de schoenmaten en de voorspelde schoenmaten via de regressierechte	

10. Bereken nu bij elke lengte het verschil tussen de gegeven schoenmaat en de voorspelde schoenmaat. Dit gaat ook eenvoudig met je rekentoestel door de lijst [L2-L3] te maken.

( )

Men noemt dit verschil het *residu.*

11. Wat betekent het dat een residu positief/negatief is?

    (Bij een positief residu ligt het bijhorende punt boven de regressielijn, bij een negatief residu ligt het punt onder de regressielijn.

Je rekentoestel berekent bij elke regressie automatisch de residu's. Ze worden bewaard in de lijst `[RESID]`. Je kunt deze lijst oproepen via `[2nd][LIST][NAMES]`.Het zijn de residu's die aangeven in hoeverre het model afwijkt van de realiteit.

5 Genetica

Bij de zoektocht naar verbanden tussen wiskunde en biologie zijn we onvermijdelijk terecht gekomen bij genetica. Kansrekening is een onderdeel van de wiskunde dat in verschillende leerplannen is opgenomen.

Een aantal studenten wiskunde en biologie uit de lerarenopleiding aan de UA maakten tijdens het academiejaar 2004-2005 een vakoverschrijdend werk. De tekst in deze paragraaf is gebaseerd op hun werk. Bij het schrijven van dit onderdeel kregen we de nodige hulp van meerder biologiecollega's op school. Ondertussen zijn de teksten uitgetest in wiskundelessen van een richting met 6 uur wiskunde. De biologieleerkracht gaf het onderwerp op ongeveer hetzelfde moment. Hoewel er niet werd samengewerkt, hebben zowel leerlingen als leerkrachten het op hetzelfde moment behandelen van een stukje 'gemeenschappelijke' leerstof in twee verschillende vakken als zeer positief ervaren. Een mogelijke start voor een intensere samenwerking…

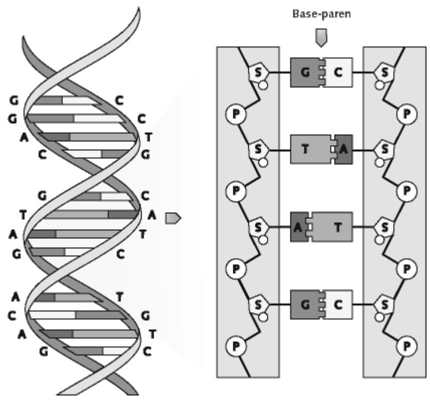
Het onderwerp genetica vind je in een aantal leerplannen van het vak biologie. In zowel het katholieke net als het gemeenschapsonderwijs komt dit voor in de derde graad ASO, in TSO-richtingen wordt het soms gegeven. De leerlingen leren over de personen die hun bijdrage leverden tot de ontwikkeling van de theoriën van de genetica, a.h.w. wat geschiedenis. Er wordt behoorlijk veel theorie afgewisseld met wat oefeningen.

Kansrekening komt in heel wat wiskunde leerplannen aan bod. In de eindtermen vind je dit onderdeel enkel onder het specifiek gedeelte, het gedeelte dat bestemd is voor sterkere richtingen in wiskunde. Afhankelijk van de sterkte van de richting, zowel in ASO als TSO, gaat men dieper op de kansrekening in en wordt ook verwacht dat voorwaardelijke kansen en de regel van Bayes op het programma komen. Tussen het vrij onderwijs en het gemeenschapsonderwijs is er een summier verschil m.b.t. het al dan niet kunnen kiezen om het onderwerp aan te bieden. In zwakkere richtingen komt het thema ofwel niet aan bod, ofwel zijn de doelstellingen bereikt als men met de leerlingen werkt rond telproblemen en eenvoudige kansbomen.

In de volgende 5 werkteksten gaan we op zoek naar raakpunten tussen genetica en kansrekening. In de eerste werktekst worden de leerlingen vertrouwd gemaakt met de nodige begrippen uit de erfelijkheidsleer. Tevens wordt het begrip boomdiagram geïntroduceerd als alternatief voor het Punnett-schema uit de biologie. We hebben de biologische achtergrond in de tekst opgenomen maar uiteraard wordt die beter in samenspraak met de leerkracht biologie aan de leerlingen gegeven.

Werktekst 1: Genetica en tellen

DNA-onderzoek kent allerlei toepassingsgebieden. In de medische wereld gebruikt men DNA-onderzoek o.a. om genetische afwijkingen op te sporen. In de juridische wereld kan men via DNA-onderzoek informatie over de dader van een misdaad of het slachtoffer opsporen of kan men vaderschap aantonen.



DNA (***D**eoxyribo-**N**ucleic-**A**cid)* is een molecule die ons genetisch materiaal bevat. Ze heeft de vorm van een dubbele spiraal. Elke spiraal is een keten, opgebouwd uit suikers (*desoxyribose*) en fosfaten. Tussen de ketens van het DNA bestaan dwarsverbindingen. Je kunt de ketens vergelijken met de spanten van een ladder en de dwarsverbindingen met de sporten. Elke dwarsverbinding bestaat uit twee basen. Er zijn vier verschillende basen: Cytosine (C), Guanine (G), Thymine (T) en Adenine (A).

1. De twee basen die de dwarsverbinding maken zijn niet willekeurig, enkel de volgende verbindingen zijn mogelijk: C met G en T met A. Stel dat op een stuk (*streng*) van de ene keten de basen in de volgorde ACCACGTTGGCAA voorkomen, bepaal dan de volgorde van de basen op de andere keten.

   (TGGTGCAACCGTT)

Unieke erfelijke eigenschappen ontstaan o.a. door verschillen in de volgorde van de basen A, G, C en T. We spreken van een DNA-code, hierbij is de code AAG verschillend van de code AGA. De opeenvolgende basen van het DNA worden per drie gegroepeerd. In de biologie spreekt men van een tripletcode. Dit krijgt ook nog andere namen zoals codogen.

2. Hoeveel combinaties van drie opeenvolgende basen zijn er mogelijk?

   ($4^3 = 64$*, we kiezen 3 maal uit 4 element en hebben te maken met een herhalingsvariatie)*

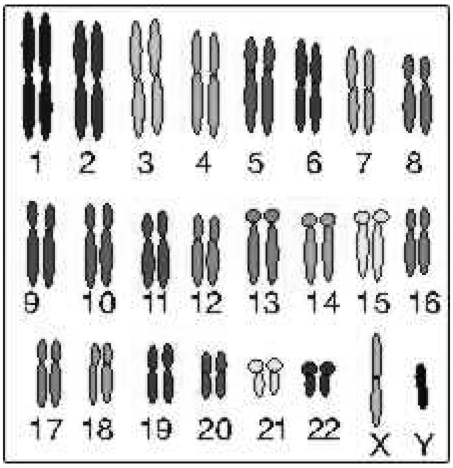
De dubbele spiraal van het DNA bestaat uit wel 3 miljard basen. Deze 3 miljard basen bevinden zich op 46 aparte stukken van het DNA, de chromosomen. De chromosomen komen in onze cellen in paren voor, we spreken van 23 paren homologe (gelijkaardige) chromosomen. De chromosomenparen worden genummerd van 1 tot 22. Het 23ste paar is het chromosomenpaar dat het geslacht bepaalt (XX zijn vrouwen, XY zijn mannen).

Wat gebeurt er nu bij de voortplanting? Tijdens een proces dat we *meiose* noemen, wijken de homologe chromosomen uiteen en worden ze tegelijk willekeurig gesorteerd. Men spreekt hier van *mixing*.

chromosoom (stuk van de opgerolde spiraal)

dubbele spiraal

dubbele spiraal: bestaat uit 2 ketens verbonden door telkens 2 basen



In de zaadcellen en eicellen (*gameten* genaamd) komen de chromosomen niet meer in paren voor. Elke gameet bevat slechts 23 chromosomen en deze komen dus op een willekeurige manier uit de 23 paren chromosomen. Laten we in deze context even van het 'linkse' chromosoom en het 'rechtse' chromosoom spreken. In een gameet kunnen de 'linkse' chromosomen van de paren met nummers 1, 5, 10 en 20 voorkomen, dan weten we dat voor de andere nummers de 'rechtse' chromosomen in deze gameet voorkomen. Als een eicel door een zaadcel bevrucht wordt, beschikt de nieuwe cel opnieuw over 23 homologe chromosomenparen.

3. Op hoeveel verschillende manieren kan een willekeurig assortiment van 23 chromosomen in een gameet gevormd worden?

   (2^{23}, ongeveer 8 miljoen. De 23 paren chromosomen worden gesplitst, zo krijgen we 2 reeksen van 23 chromosomen, deze worden op een willekeurige manier gecombineerd in de gameten. We kiezen dus 23 maal uit 2 elementen en hebben te maken met een herhalingsvariatie.)

4. Je weet nu dat elke gameet één van de 8 miljoen combinaties van chromosomen vertegenwoordigt. Via eicel en zaadcel geeft elke ouder één mogelijke combinatie door aan hun kind. Hoeveel combinaties van chromosomenparen kunnen er bijgevolg door één ouderpaar gevormd worden?

   (64 miljoen)

De vorige vraag geeft duidelijk aan hoe uniek elke mens wel is. Via de *genen* wordt deze uniciteit verder bepaald. Een bepaald stuk van het DNA dat genetische informatie bevat voor één kenmerk, noemen we een *gen.* De *genen* liggen op de chromosomen en bepalen onze kenmerken. Je hebt het gen voor de oogkleur, de lichaamsbouw, de vorm van de neus, de vorm van het oor… Een homoloog chromosomenpaar bevat dezelfde set van genen. Bijvoorbeeld eerst een gen dat codeert voor de haarkleur, vervolgens één dat codeert voor de stem, … Echter, het *gen* voor de haarkleur (bijvoorbeeld) kan in verschillende variaties voorkomen, dit noemen we *allelen.* Het *allel* op het ene homologe chromosoom kan bijvoorbeeld voor blond haar zorgen, terwijl het *allel* voor de haarkleur op het andere homologe chromosoom voor zwart haar zorgt. De persoon die deze 2 allelen in zich heeft zal zwart haar hebben. We noemen het kenmerk 'zwart haar' *dominant* en het kenmerk 'blond haar' *recessief.* Het *dominante* kenmerk overheerst het *recessieve* kenmerk 'blond haar' en hoewel de persoon inwendig *allelen* voor beide kenmerken bezit, vertoont hij uitwendig alleen dit *dominante* kenmerk.

5. Ga bij je medeleerlingen de volgende eigenschappen na: de haarkleur (blond, zwart, hoogblond, bruin…), de kleur van de ogen (blauw, grijs, groen, …), de aanhechting van de oorlellen (los, vast) en de bloedgroep. Ga deze kenmerken ook eens na bij je vader, moeder, broer en/of zus.

Je zult heel wat verschillen merken. Misschien zie je binnen de familie gelijkenissen. Sommige eigenschappen erven we inderdaad van onze ouders, grootouders of voorouders. In wat volgt gaan we na hoe deze overerving gebeurt. We beschouwen vereenvoudigde voorbeelden en werken met kenmerken die erfelijk kunnen zijn.

In 1865 publiceerde Gregor Mendel, een monnik uit een Augustijner klooster in het Pruisische Brno, een artikel in het obscure tijdschrift 'Verhandlungen des naturforschenden

Vereines in Brünn'. Het artikel beschreef de resultaten van een reeks experimenten met erwtenplanten. Mendel ontdekte bovendien dat de overerving van eigenschappen via bepaalde wetmatigheden gebeurt. Hij vond dat tijdens de voortplanting de allelen die op een chromosomenpaar voorkomen gescheiden worden. Een kind krijgt dus één allel van elke ouder via zaad- en eicel (de *gameten).*

We beschouwen het kenmerk 'losse of vaste oorlellen'. Dit kenmerk (*gen*) vinden we terug op een chromosomenpaar. We spreken van een allel L voor losse oorlellen en een allel l voor vaste oorlellen. Het kenmerk voor losse oorlellen is dominant. Daarom wordt het allel met een hoofdletter genoteerd. Het kenmerk voor vaste oorlellen is recessief en wordt met een kleine letter genoteerd. Op de foto hiernaast zie je een 'losse oorlel'.

6. Geef alle mogelijke herhalingsvariaties en herhalingscombinaties van 2 elementen uit $\{L, l\}$.

   (herhalingsvariaties: LL, Ll, lL, ll, herhalingscombinaties: LL, Ll, ll)

Het *genotype* van een bepaald kenmerk zijn de allelen die op het chromosomenpaar voorkomen m.b.t. dit kenmerk. In vraag 6 zocht je dus alle mogelijke genotypen voor het kenmerk 'vaste oorlellen'. De volgorde van de allelen speelt voor het genotype geen rol. Het *fenotype* is de uiterlijke verschijningsvorm van het kenmerk (in dit geval losse of vaste oorlellen). Elk kenmerk wordt dus bepaald door twee allelen, die hetzelfde kunnen zijn of verschillend. Bij twee identieke allelen zeggen we dat het individu *homozygoot* is voor het kenmerk, bij verschillende allelen is het individu *heterozygoot.*

7. We veronderstellen een ouderpaar waarbij beide ouders homozygoot zijn voor het kenmerk vaste of losse oorlellen. Moeder heeft vaste oorlellen en vader losse. Wat zijn hun genotypen en fenotypen?

   (Moeder heeft genotype ll en fenotype 'vaste oorlellen', vader heeft genotype LL en fenotype 'losse oorlellen')

Mendel sprak van de *P-generatie (Parentes)* met nakomelingen in de *F1-generatie (Filius),* die op hun beurt nakomelingen en bijgevolg een *F2-generatie* vormen.

8. Geef de allelen die in eicel en zaadcel terecht komen. Geef de mogelijke geno- en fenotypes in de F_1-generatie.

(In de eicel komt l terecht, in de zaadcel L. Het enige mogelijke genotype van de F_1-generatie is dus Ll. Het fenotype is losse oorlellen.)

9. Zijn de kinderen uit de F_1-generatie homozygoot of heterozygoot?

   (heterozygoot)

Mendel formuleerde het bovenstaande in zijn eerste wet: *Bij kruising van twee homozygoten die in één eigenschap verschillen (hier de hechting van de oorlellen), ontstaan nakomelingen die allemaal hetzelfde genotype en fenotype hebben.*

10. Wanneer de F_1-generatie zich op zijn beurt gaat voortplanten, geeft opnieuw elke ouder één allel voor het kenmerk losse/vaste oorlellen door aan het kind. Geef de mogelijke geno- en fenotypes voor de kinderen in de F_2-generatie.

    (Een eerste mogelijkheid is dat je van beide ouders allel L erft. Het kan ook dat je van beide ouders het allel l erft. Je kunt ook van de ene ouder het allel L erven en van de andere het allel l. Voor het genotype maakt het niet uit of je het allel L van je vader of

van je moeder geërfd hebt. De mogelijke genotypen met bijbehorend fenotype zijn bijgevolg: LL losse oorlellen, Ll losse oorlellen, ll vaste oorlellen.)

Om vragen zoals 8 en 10 op te lossen, wordt in de biologie een Punnett-schema gebruikt.

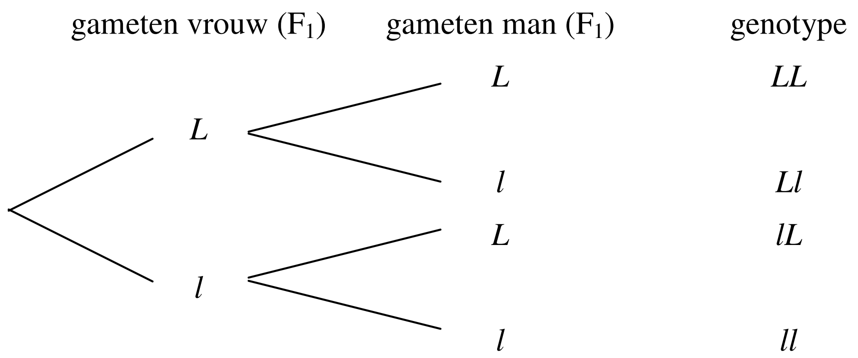
vrouw/man	*L*	*L*
l	*Ll*	*Ll*
l	*Ll*	*Ll*

tabel 1

vrouw/man	*L*	*l*
L	*LL*	*Ll*
l	*Ll*	*ll*

tabel 2

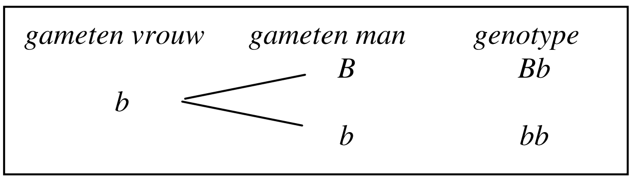
Een schema dat we in wiskunde voor dergelijke problemen gebruiken, is een boomdiagram. Bekijk hieronder het boomdiagram voor het Punnett-schema. Op de knooppunten bevinden zich telkens de allelen die zich in de gameten van de vrouw of de man bevinden.



We merken dat de genotypen van het ouderpaar uit de P-generatie terug voorkomen bij de kleinkinderen in de F_2-generatie. Mendel formuleerde dit o.a. in zijn tweede wet.

11. Bij de mens komt brachydactylie voor. Het is een dominante erfelijke afwijking waarbij alle vingers en tenen slechts twee kootjes bevatten. We beschouwen een koppel waarbij de vrouw normale vingers (drie kootjes) heeft en de man vingers heeft met slechts twee kootjes. Hij is voor dit kenmerk heterozygoot. (Dit is trouwens normaal omdat het om een dominante afwijking gaat, die toch vrij zeldzaam is.) Stel het Punnett-schema op en maak een boomdiagram. Gebruik B (voor brachydactylie) en b (voor normaal) als symbolen.

vrouw/man	*B*	*b*
b	*Bb*	*bb*
b	*Bb*	*bb*



12. Albinisme (d.w.z. het niet hebben van pigmentatie waardoor huid en haren volledig wit zijn) is het gevolg van een recessieve erffactor. Stel dat een albino-ouder zich voortplant met een normale ouder. Kan dan het kind een albino zijn? Ondersteun je redenering met het Punnett-schema en/of het boomdiagram. Gebruik *P* (voor pigmentatie) en *p* (voor albinisme) als symbolen.

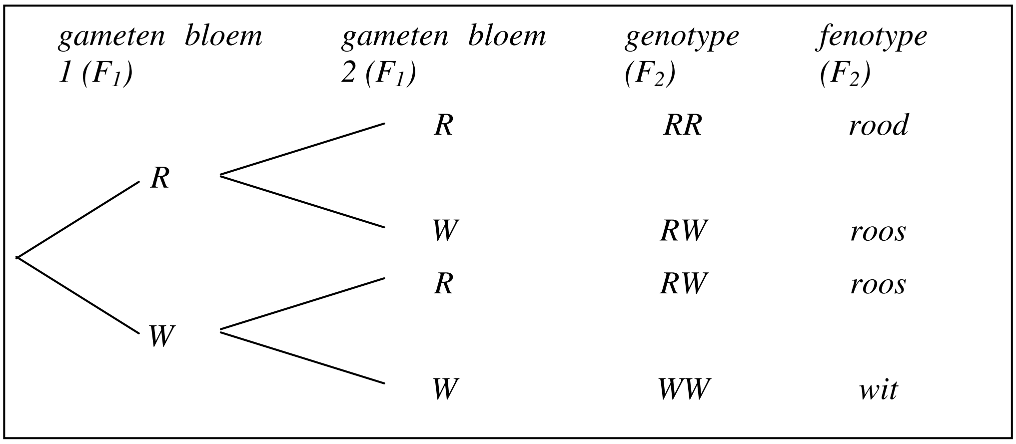
(Omdat albinisme recessief is, heeft de albino-ouder genotype pp. De normale ouder heeft genotype Pp of PP. Een ouder met genotype pp kan samen met een ouder met genotype Pp een albino ter wereld brengen. Punnett-schema's:

vrouw/man	*p*	*p*
P	*Pp*	*Pp*
p	*pp*	*pp*

vrouw/man	*p*	*p*
P	*Pp*	*Pp*
P	*Pp*	*Pp*

13. Om verschillende variaties van bloemen op de markt te krijgen, worden deze gekruist. Zo leverde een kruising van sleutelbloemen met een rode en witte kleur, enkel roze bloemen op in de F_1-generatie. We hebben hier dus geen dominant kenmerk en spreken van *co-dominantie.* Kies gepaste symbolen. Geef de genotypen voor de F_1-generatie, leid hieruit de genotypen en fenotypes van de F_2-generatie af. Ondersteun je redenering met een boomdiagram.

(Er is geen dominantie vandaar dat we geen onderscheid moeten maken tussen hoofdletters en kleine letters. R staat voor rood, W staat voor wit. Het genotype van de P-generatie is RR voor de rode bloemen en WW voor de witte bloemen. Het genotype van de F_1–generatie is dan RW, met als fenotype roos. In de figuur hieronder vind je het boomdiagram voor de F2-generatie. Merk ook hier op dat de genotypen uit de P-generatie voorkomen bij de F_2-generatie.)



In de vorige werktekst werd Mendel, grondlegger van de genetica, al vermeld. In de tweede werktekst bekijken we de kruising die aan de basis ligt van zijn derde wet: *Twee kenmerken, gelegen op twee verschillende chromosomen, erven over op onafhankelijke wijze.*

Werktekst 2: Mendeliaanse genetica

Mendel deed proeven op erwtenplanten. Een typische proef bestond erin twee planten met verschillende karakteristieken (b.v. paarse en witte bloemen) te kruisen en na te gaan hoe de eerste generatie nakomelingen eruit ziet. Wanneer slechts één kenmerk gevolgd wordt (in het voorbeeld: bloemkleur), spreekt men van een *monohybride* kruising. Bij *dihybride* kruisingen worden 2 kenmerken gevolgd (bv. gele of groene en gladde of gerimpelde erwten). De kenmerken die Mendel bekeek, hadden een eenvoudige genetische basis: het ging steeds over eigenschappen beïnvloed door één gen, waarvoor slechts twee allelen bestaan, waarvan één steeds volledig dominant is over het andere. Dergelijke kenmerken zijn uiterst zeldzaam. Dat neemt niet weg dat de basisprincipes van de Mendeliaanse genetica nuttig blijven.

Mendel kruiste o.a. een homozygote erwtenplant met gele ronde zaden, met een homozygote plant met groene gerimpelde zaden en volgde zo de evolutie van 2 kenmerken. Hij constateerde dat de F_1-generatie enkel uit gele ronde erwten bestond.

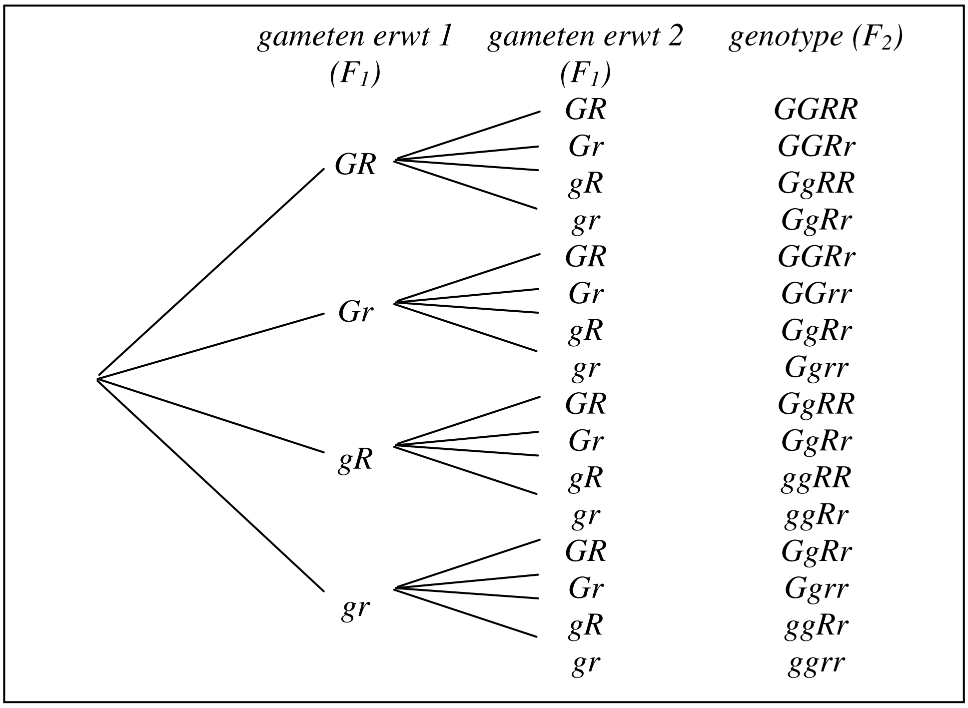
1. Wat kan je uit de resultaten voor de F_1-generatie afleiden met betrekking tot dominantie?

   (Geel en rond zijn dominante kenmerken.)

Voor de F_2-generatie telde hij 315 gele en ronde erwten, 101 gele en gerimpelde erwten, 108 groene en ronde erwten, 32 groene en gerimpelde erwten.

2. Gebruik de letters G, g, *R* en *r* om op een gepaste wijze de verschillende kenmerken voor te stellen. Geef de genotypen voor de P- en F_1-generatie (je krijgt een combinatie met vier letters). Stel vervolgens een boomdiagram op voor de F_2-generatie. Bedenk dat elke ‘ouder’ voor elk kenmerk telkens één allel doorgeeft.

   (Symbolen: geel G, groen g, rond R, gerimpeld r. Genotypen P-generatie: een homozygote plant met gele, ronde erwten heeft 2 *allelen GG voor het kenmerk geel en* 2 *allelen RR voor het kenmerk rond. Dit resulteert in genotype GGRR. Op een analoge manier kan je verklaren dat een homozygote plant met groene, gerimpelde erwten genotype ggrr heeft. Elke plant geeft voor elk kenmerk* 1 *allel door aan de F_1-generatie. Zo geeft de plant met gele, ronde erwten GR door en de andere plant gr. We krijgen bijgevolg voor de F_1-generatie het genotype GgRr. We zouden uiteraard deze combinatie ook als GRgr kunnen schrijven, maar we volgen hier de conventie uit de biologie waar de allelen voor eenzelfde kenmerk naast elkaar genoteerd worden. Het boomdiagram voor de F_2-generatie vind je in de volgende figuur.)*



3. Hoeveel eindtakken heeft het boomdiagram?
4. Hoeveel verschillende genotypen constateer je?

5. Hoeveel verschillende fenotypen constateer je? Klopt dit met de resultaten van Mendel's proef?
6. Bepaal de verhouding van de verschillende fenotypen in de F_2-generatie. Klopt deze verhouding met Mendel's proef?

   (geel, rond $\frac{9}{16} \approx \frac{315}{556}$, *geel, gerimpeld* $\frac{3}{16} \approx \frac{101}{556}$, *groen, rond* $\frac{3}{16} \approx \frac{108}{556}$, *groen, gerimpeld* $\frac{1}{16} \approx \frac{32}{556}$. *We spreken van de verhouding* 9:3:3:1.*)*
7. Stel dat een man heterozygoot is voor de kenmerken rechtshandigheid en pigmentatie. Zijn partner is linkshandig en albino. Zowel rechtshandigheid als pigmentatie zijn dominant. Beide kenmerken liggen op verschillende chromosomen. Maak een boomdiagram en leid hieruit de verschillende genotypen en fenotypen af voor de F_1-generatie.

   (We stellen rechtshandigheid voor door R, linkshandigheid door r, normale pigmentatie door P en albinisme door p. De heterozygote man heeft bijgevolg voor deze twee kenmerken genotype RrPp. De partner is linkshandig en albino, beide recessief, bijgevolg heeft zij genotype rrpp. Hieronder vind je het boomdiagram.)

gameten man (P)	*gameten vrouw (P)*	*genotype (F_1)*	*fenotype (F_1)*
RP	*rp*	*RrPp*	*Rechtshandig en pigmentatie*
Rp	*rp*	*Rrpp*	*rechtshandig en albino*
rP	*rp*	*rrPp*	*linkshandig en pigmentatie*
rp	*rp*	*rrpp*	*linkshandig en albino*

8. Bepaal de verhouding van de verschillende fenotypes in de F_2-generatie.

   (De vier verschillende fenotypes komen evenveel voor. De verhouding is bijgevolg voor elk fenotype $\frac{1}{4}$. *In de biologie spreekt men van een verhouding* 1:1:1:1.*)*

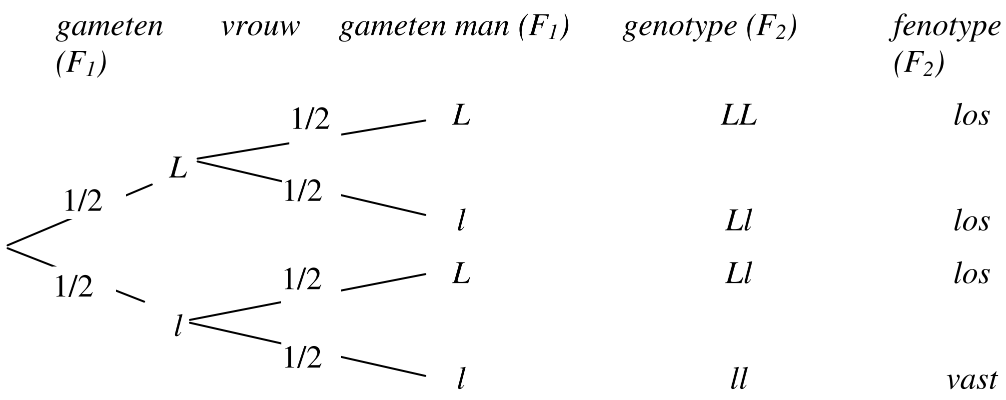
De derde werktekst confronteert de leerlingen met vragen als: 'Wat is de kans om vaste oorlellen te hebben als je beide ouders losse oorlellen hebben?' In deze tekst wordt de boomdiagramstructuur gebruikt om er kansbomen van te maken.

Werktekst 3: Genetica en kansbomen

De boomdiagrammen die we in de vorige werktekst maakten, kunnen we ook bekijken als 'kansbomen'.

We veronderstellen een grootouderpaar waarbij de grootmoeder vaste oorlellen (*ll*) heeft en de grootvader losse (*LL*).

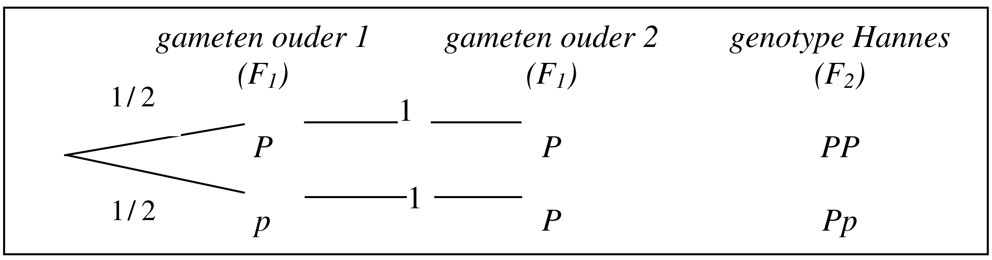
1. Wat is de kans dat zij een zoon/dochter ter wereld brachten met losse oorlellen?
   *(*1*, want alle nakomelingen zullen genotype Ll hebben en bijgevolg losse oorlellen.)*
2. Wat is de kans dat een kleinkind van het grootouderpaar drager is van het allel voor vaste oorlellen?
   (De kans dat een kleinkind drager is van het allel voor vaste oorlellen is $\frac{3}{4}$*, zoals blijkt uit de onderstaande kansboom.)*



3. Wat is de kans dat dit grootouderpaar kleinkinderen heeft met vaste oorlellen?
   (Uit de kansboom in het antwoord van vraag 2 *blijkt dat de kans op kleinkinderen met vaste oorlellen* $\frac{1}{4}$ *is.)*
4. Wat is de verhouding van kleinkinderen met losse oorlellen t.o.v. kleinkinderen met vaste oorlellen?
   *(*3:1*)*

We bekijken het kenmerk voor albinisme en nemen als symbolen *P* voor normaal pigment (dominant) en *p* voor albino of geen pigment. Hannes en zijn ouders zijn geen albino's, één grootouder wel, alle andere grootouders zijn geen drager van het albino-allel.

5. Bepaal de genotypen van de familie.
   (Hannes en zijn ouders: PP of Pp. De albino grootouder: pp. Alle andere grootouders: PP.)
6. Hoe groot is de kans dat Hannes drager is van het albino-allel?
   (De grootouder (PP) met z'n albino-partner (pp) hebben in de F_1*-generatie nakomelingen met genotype Pp. De vader of de moeder van Hannes heeft bijgevolg genotype Pp. Het tweede grootouderpaar is beide homozygoot PP en hebben nakomelingen met genotype PP. De tweede ouder van Hannes heeft dus genotype PP. Uit de onderstaande kansboom blijkt dan dat de kans dat Hannes drager is van het albino-allel* 0,5 *is.)*



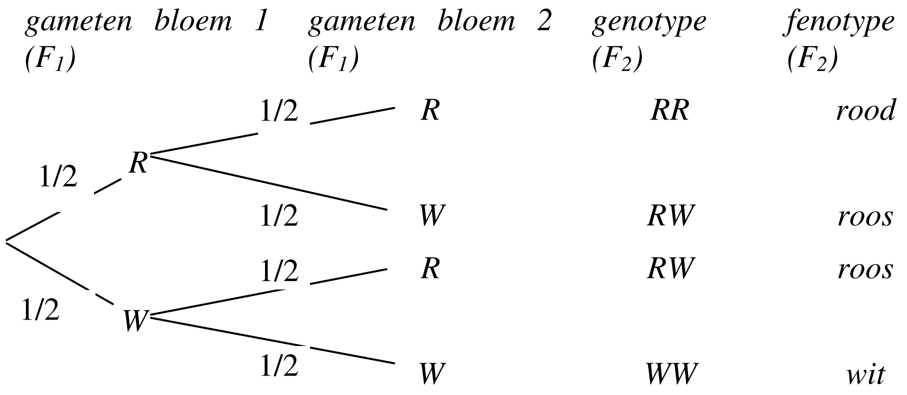
7. Stel dat Hannes trouwt met Mitte, beide zijn ze geen albino maar wel drager van het albino-allel. Hoeveel procent kans hebben ze dat hun kind geen albino is?

   (Hannes en Mitte hebben allebei genotype Pp. We kunnen een analoge kansboom maken als in vraag 2. *Ll wordt hier Pp, hieruit blijkt dat zij* 75% *kans hebben op een kind dat geen albino is.)*

Een kruising van sleutelbloemen met een rode en witte kleur levert enkel roze bloemen op in de F_1-generatie.

8. Bepaal de kans op rode bloemen in de F_2-generatie.

   (We maken de volgende kansboom:



   Hieruit lezen we af dat de kans op rode bloemen in de F_2-generatie 0,25 *is.)*

9. Bepaal de verhouding rode/roze/witte bloemen.

   *(*1*:*2*:*1*)*

De voorbeelden van de oorlellen en de sleutelbloemen illustreren de tweede wet van Mendel: *Bij een onderlinge kruising van hybriden uit een eerste monohybride kruising van homozygote ouders, splitst de uniforme F_1- generatie zich weer in de F_2-generatie volgens de ouder-fenotypen. Dit gebeurt in volgende verhoudingen:* 3/1 *in geval van dominantie en* 1/2/1 *wanneer er een intermediaire bestaat.*

In de situatie die Mendel beschouwt zijn de ouders in de F_1-generatie heterozygoot *(Bb)*. Van de gameten die bij de meiose gevormd worden, bevatten er 50% het allel *B* en 50% het allel *b*. Deze gameten worden dan lukraak bij elkaar gebracht. Als een eicel (drager van B of b) bevrucht wordt, is er 50% kans dat dit door een zaadcel met allel *B* gebeurt en 50% kans dat dit door een zaadcel met allel *b* gebeurt.

Meestal zijn allelen niet gelijk verdeeld in een populatie. De situatie die Mendel bekijkt, is dus uitzonderlijk. In de volgende werktekst houden we hier rekening mee.

Werktekst 4: Populatiegenetica

In wat volgt bestuderen we een populatie hamsters waarvan 80% van alle gameten drager is van het dominante allel *B* voor een zwarte pels. Dus is 20% drager van het allel *b* voor een grijze pels.

1. Stel een kansboom op voor de volgende generatie en bepaal hoeveel procent genotype *BB, Bb* en *bb* heeft.

(De kans op BB is: $0,8\cdot 0,8=0,64$*, de kans op Bb is:* $2\cdot 0,8\cdot 0,2=0,32$ *en de kans op bb is:* $0,2\cdot 0,2=0,04$*.)*

2. Hoeveel procent van de hamsters heeft bijgevolg een zwarte pels?

   (Hamsters met een zwarte pels hebben genotype BB of Bb. De gevraagde kans is bijgevolg 0,96*.* 96% *van de hamsters heeft dus een zwarte pels.)*

3. Hoeveel procent van de gameten van deze generatie is drager van het B-allel?

   (De BB-hamsters geven enkel het allel B door aan hun gameten. Dus 64% *van de gameten is al drager van het allel B. De Bb-hamsters geven aan de helft van hun gameten het allel B. Dit levert nog eens* 16% *gameten met allel B. In het totaal zullen dus* 80% *van de gameten drager zijn van het allel B.)*

4. Zijn de hamsters met grijze pels met uitsterven bedreigd?

   (Neen, want er zullen nog 20% *van de gameten drager zijn van het b-allel.)*

Blijkbaar blijven de percentages van de allelen in de gehele populatie dezelfde tijdens de volgende generatie. Dit is wat de wet van Hardy-Weinberg zegt: *De genenfrequenties en de genotypenfrequenties blijven constant van de ene generatie op de volgende, onder bepaalde voorwaarden.*

In het voorbeeld van de hamsters is het dominante allel ook het meest voorkomende allel in de gehele populatie. Kan dit veralgemeend worden?

Sommige baby's worden geboren met meer dan tien vingers of tenen, we spreken van veelvingerigheid. Het allel dat veelvingerigheid bepaalt, is dominant over het 'normale' allel. In de Verenigde Staten wordt 1 op 400 baby's geboren met deze afwijking.

5. Bepaal de genotypen van de baby's die geboren worden met en zonder de afwijking, gebruik de letter *v* als symbool.

   (V staat voor veelvingerigheid, v staat voor het normale aantal vingers. De baby's die met de afwijking geboren worden, hebben genotype Vv of VV. De baby's die zonder de afwijking geboren worden zijn homozygoot vv.)

6. Bepaal hoeveel percent van de baby's geboren wordt met tien vingers en tenen.

   ($\frac{399}{400}=99,75\%$ *)*

7. Bepaal welk allel het meeste voorkomt in de Verenigde Staten.

   (Als 99,75% *van de baby's homozygoot vv is, zullen al minstens* 99,75% *van de gameten in de volgende generatie het allel v zal bevatten. v is duidelijk het meest voorkomende allel.)*

De 'dominantie' van een allel zegt bijgevolg niets over het allel dat het meest voorkomt in de populatie.

8. Stel dat p en q de kansen zijn van een allelenpaar A en a in een populatie. Welk verband bestaat er bijgevolg tussen p en q?

   ($p+q=1$*)*

9. Bepaal de kansen van de mogelijke genotypen van de volgende generatie.

   (AA: p^2*, Aa:* $2pq$*, aa:* q^2*)*

10. In een populatie komt gespleten gehemelte voor bij één op de 2500 personen. Een gespleten gehemelte is een recessief kenmerk. Bereken de kansen van voorkomen van de mogelijke genotypen in een populatie.

(Symbolen: g staat voor gespleten gehemelte, G staat voor normaal gehemelte. De persoon met een gespleten gehemelte heeft genotype gg, dus $q^2 = 0,0004$*, zodat* $q = 0,02$*. Dan is* $p = 0,98$ *en bijgevolg zijn de kansen voor GG:* $p^2 = 0,9604$*, Gg:* $2pq = 0,0392$ *en gg:* $0,0004$*.)*

11. Hoeveel van de 2500 personen zijn drager van het allel voor gespleten gehemelte?
    (3,96% is drager van dit allel, dit zijn 99 personen.)

In de laatste werktekst passen we wat we tot nu toe geleerd hebben toe op het ABO-systeem van onze bloedgroepen.

Werktekst 5: De genetica van ons bloed

Ieder kent allicht de vier bloedgroepen A, B, O, AB. Het is niet onbelangrijk om je bloedgroep te kennen. Soms kan iemands leven gered worden door een bloedtransfusie. Maar kan iedereen zomaar aan iedereen bloed geven?

De bloedgroepen worden bepaald door *antigenen.* Dit zijn eiwitten op de buitenkant van de rode bloedcellen. Iemand met bloedgroep A heeft antigen A op de rode bloedcel en antistof B in het bloedserum. Iemand met bloedgroep B heeft antigen B op de rode bloedcel en antistof A in het bloedserum. Iemand met bloedgroep O heeft geen antigenen op de rode bloedcellen en antistoffen A en B in het bloedserum en iemand met bloedgroep AB heeft antigenen A en B op de rode bloedcellen en geen antistoffen in het bloedserum.

Bloedgroep	antigen	antistof
A	A	B
B	B	A
O	/	A en B
AB	A en B	/

Wanneer iemand bloed krijgt dat vreemde antigenen bevat, dan wordt het afweersysteem geactiveerd en komt de productie van *antistoffen* op gang die het bloed met de lichaamsvreemde antigenen afbreken. Iemand met bloedgroep O heeft geen antigenen voor A noch voor B. Het lichaam zal dus bloed van bloedgroep A, B, of AB als lichaamsvreemd beschouwen. Het gevolg is dat het bloed gaat klonteren. Wie bloedgroep A heeft, zal bloed met bloedgroep B als lichaamsvreemd ervaren doordat het antistoffen bevat voor B.

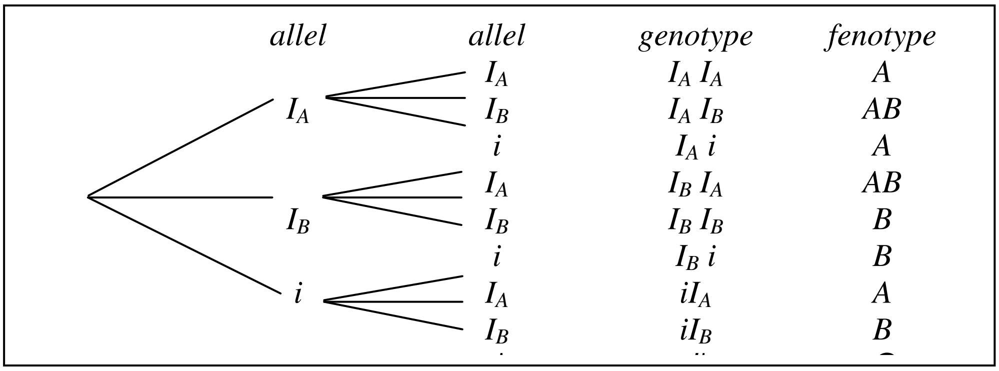
1. Vul de onderstaande tabel aan door met X aan te geven dat een bloedtransfusie mag uitgevoerd worden. De bloedgroepen van de donor staan in de eerste kolom.

donor/ontvanger	A	B	O	AB
A				
B				
O				
AB				

Deze 4 bloedgroepen zijn de fenotypen en worden voorgesteld door A, B, O en AB. We kunnen deze letters bijgevolg niet meer gebruiken om de allelen voor te stellen. In de biologie gebruikt men de volgende symbolen: I_A codeert voor de A-bloedgroep, I_B codeert voor de B-bloedgroep en i codeert voor geen van beide. De twee eerst genoemde allelen zijn dominant over het i-allel. Tegenover elkaar zijn ze co-dominant.

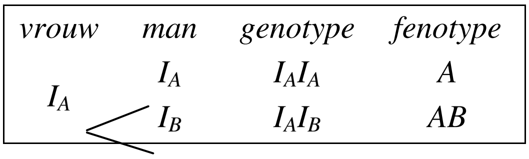
2. Geef de mogelijke genotypen die deze allelen kunnen vormen en geef het bijbehorende fenotype.

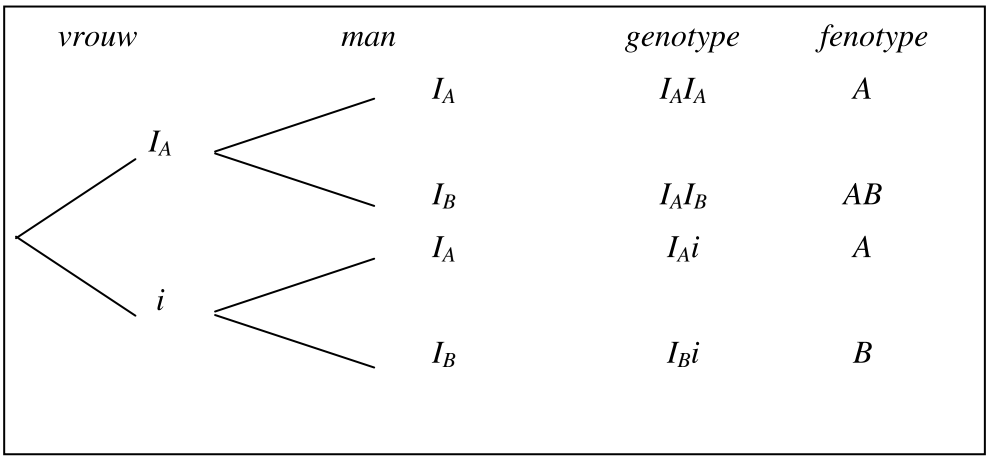
   (De eindtakken van het boomdiagram hieronder geven de mogelijke genotypen. De fenotypes zijn ook op de figuur te lezen.)



3. Een vrouw met bloedgroep A huwt een man met bloedgroep AB. Welke bloedgroepen kunnen hun kinderen hebben?

   (Het genotype van de vrouw kan I_AI_A of I_Ai zijn en de man heeft genotype I_AI_B. We maken voor de beide situaties een boomdiagram:





   Hieruit blijkt dat de kinderen bloedgroepen A, B en AB kunnen hebben.)

4. Is het mogelijk dat een kind bloedgroep O heeft als beide ouders bloedgroep A hebben?

   (Ja, als beide ouders genotype I_Ai hebben, kunnen zij een kind voortbrengen met genotype ii.)

Een zwangere vrouw kan een kind dragen met een verschillende bloedgroep dan zij zelf heeft. We bekijken een moeder met bloedgroep O en een kind met bloedgroep A. Het kind krijgt dus van de moeder antistoffen tegen A. Als deze antistoffen het bloed van het kind na de bevalling afbreken, veroorzaakt dit geelheid. Meestal is deze geelheid niet ernstig, soms is behandeling onder een blauwe lamp nodig en zeer zelden is een behandeling nodig waarbij het kind nieuw bloed krijgt.

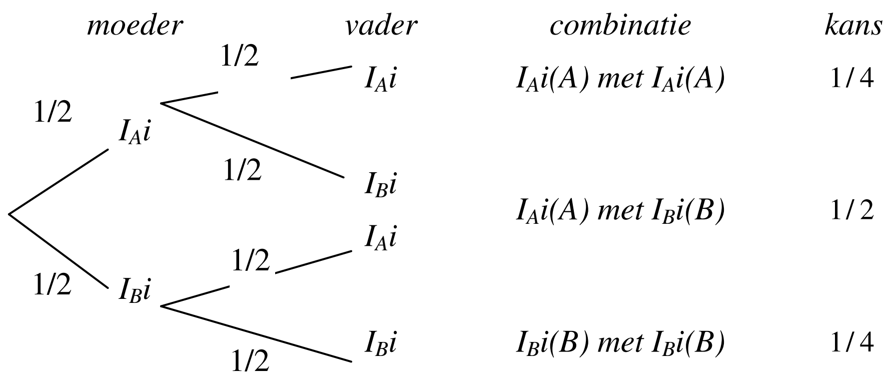
5. De antistoffen van de moeder kunnen tijdens de zwangerschap via de moederkoek naar het kind gaan. Omdat dit niet schadelijk is, wordt de bloedgroep van de vader niet noodzakelijk gecontroleerd. Bepaal de mogelijke bloedgroepen van de vader in het bovenstaande voorbeeld (moeder O en kind A). Bepaal in elke situatie de kans dat het kind bloedgroep A heeft met deze moeder en vader.

   (De moeder heeft genotype ii, het kind heeft dan genotype I_Ai en moet bijgevolg allel I_A van de vader gekregen hebben. De vader kan dus genotype I_AI_A, I_Ai of I_AI_B hebben en bijgevolg bloedgroepen A of AB hebben. Als de vader bloedgroep A heeft met genotype I_AI_A. Heeft het kind altijd bloedgroep A en is de kans bijgevolg 1. *Bij een vader met bloedgroep A en genotype I_Ai en bij een vader met bloedgroep AB heeft het kind een kans van $\frac{1}{2}$ op bloedgroep A.)*

De beide grootvaders van Hannes hebben bloedgroep O, de beide grootmoeders hebben bloedgroep AB. In de volgende vragen zoeken we de kans dat Hannes bloedgroep A heeft.

6. Welke bloedgroepen kunnen de ouders van Hannes hebben? Bepaal de kans per mogelijk ouderpaar.

   (De beide grootvaders van Hannes hebben genotype ii, de beide grootmoeders hebben genotype I_AI_B. De ouders van Hannes hebben genotype I_Ai of I_Bi. De onderstaande kansboom geeft de mogelijke combinaties voor de ouders van Hannes met de respectieve kansen:

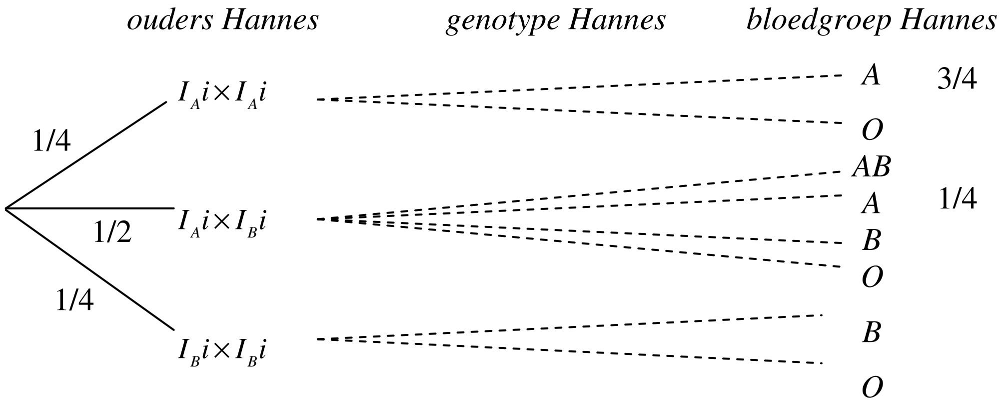


   De ouders hebben een kans van telkens $\frac{1}{4}$ om allebei bloedgroep A of allebei bloedgroep B te hebben en een kans van $\frac{1}{2}$ om een verschillende bloedgroep te hebben: de ene ouder bloedgroep A en de andere bloedgroep B.)

7. Bepaal per ouderpaar uit de vorige vraag de mogelijke genotypen voor de bloedgroepen van hun nakomelingen. Bepaal hieruit de kans dat Hannes bloedgroep A heeft.

   (Het ouderpaar $I_Ai \times I_Ai$ heeft nakomelingen met genotype I_AI_A, I_Ai of ii, met respectievelijke kansen $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. De kans dat Hannes met deze ouders bloedgroep A

heeft, is bijgevolg $\frac{3}{4}$. *Hij kan ook bloedgroep O hebben. Het ouderpaar* $I_Ai \times I_Bi$ *heeft nakomelingen met genotype* I_AI_B, I_Ai, I_Bi *of ii met elk kans* $\frac{1}{4}$. *Met deze ouders kan Hannes elke bloedgroep hebben met een kans van* $\frac{1}{4}$. *Het ouderpaar* $I_Bi \times I_Bi$ *heeft nakomelingen met genotype* I_BI_B, I_Bi *of ii, met respectievelijke kansen* $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. *Hannes zal nooit bloedgroep A hebben als hij uit dit ouderpaar geboren wordt. De onderstaande boom vat alle informatie samen:*



Bijgevolg is de kans dat Hannes bloedgroep A heeft:

$$P(A) = P(I_Ai \times I_Ai) \cdot P(A | I_Ai \times I_Ai) + P(I_Ai \times I_Bi) \cdot P(A | I_Ai \times I_Bi) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16})$$

8. Als Hannes bloedgroep A heeft, wat is dan de kans dat de vader en moeder van Hannes een verschillende bloedgroep hebben?

   (We hebben hier te maken met een voorwaardelijke kans die niet onmiddellijk uit de kansboom die je in het antwoord bij 6 vindt, kan afgelezen worden. Het ouderpaar met verschillende bloedgroepen heeft in deze oefening $I_Ai \times I_Bi$ *als genotypen. We moeten dus de kans* $P(I_Ai \times I_Bi | A)$ *bepalen:*

$$P(I_Ai \times I_Bi | A) = \frac{P(I_Ai \times I_Bi \text{ en } A)}{P(A)} = \frac{P(I_Ai \times I_Bi) \cdot P(A | I_Ai \times I_Bi)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{2}{5})$$

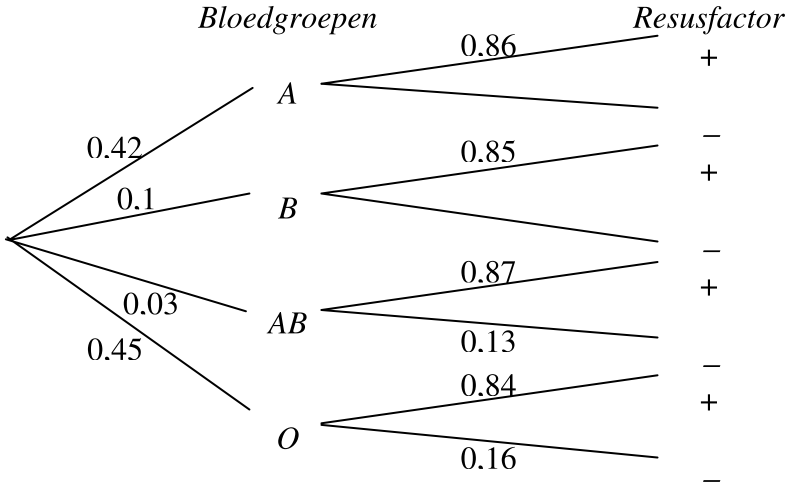
Bloedgroepen worden steeds weergegeven door A+, O–, … De + en de – slaan op de resusfactor. De resusfactor is een ander soort bloedgroep (D), maar in de praktijk wordt D nooit vermeld. Iemand met een positieve resusfactor heeft antigen D op de rode bloedcellen.

Bij bloedtransfusies moet men ook op de resusfactor letten. Als men resusfactorpositief bloed toedient aan iemand die resusfactornegatief is, worden antistoffen gemaakt. Het antigen D wordt immers als lichaamsvreemd ervaren. De eigenschap resusfactorpositief/resusfactornegatief wordt bepaald door slechts 2 allelen (zoals bij de losse of vaste oorlellen), namelijk R (Rh^+) en r (Rh^-). Resusfactorpositief is dominant over resusfactornegatief.

Van de Belgische bevolking heeft men vastgesteld dat 42% bloedgroep A heeft, 10% bloedgroep B, 3% bloedgroep AB en 45% bloedgroep O. Verder is ook geweten dat van deze bloedgroepen respectievelijk 86%, 85%, 87% en 84% resusfactorpositief is.

In een voorlichtingsfolder van de dienst Gynaecologie staat: *Van alle zwangeren is* 85% *resusfactorpositief. Er zijn dan geen gevolgen voor de zwangerschap. Bij* 15% *is de resusfactor negatief.* In de volgende reeks vragen, gaan we op zoek naar deze percentages.

9. Stel een kansboom op met de bloedgroepen en de resusfactor.



10. Hoeveel van de 10,1 miljoen Belgen heeft bloedgroep B?
    *(*1,01 *miljoen)*
11. Hoeveel Belgen hebben bloedgroep B^-?
    *(*151 500*)*
12. Wat is de kans dat een willekeurige Belg O^- is?
    ($P(O \text{ en } -) = P(O) \cdot P(-|O) = 0{,}45 \cdot 0{,}16 = 0{,}072$ *)*
13. Wat is de kans dat een willekeurige Belg resusfactornegatief heeft?
    ($P(A-) + P(B-) + P(AB-) + P(O-) = 0{,}15$ *)*

In de volgende reeks vragen gaan we op zoek naar het percentage van de Belgische bevolking dat drager is van het resusnegatief allel.

14. Geef de mogelijke genotypen voor het kenmerk ‘resusfactor’.
    (RR, Rr, rr)
15. Welke kans vonden we in vraag 13?
    (P(rr) = 0,15*)*
16. Bepaal nu de kansen voor de andere genotypen.
    (Uit de vorige werktekst: Stel P(rr) = q², P(RR) = p² en P(Rr) = 2*pq. q²* = 0,15*, dus q* = 0,39. *Hieruit volgt dat p* = 0,61 *en dus is P(RR)* = 0,37*, P(Rr)* = 0,48*. De kans op het dragen van het resusnegatief allel is dus* 0,63*.)*

Wanneer een zwangere vrouw resusfactornegatief is en haar partner resusfactorpositief, dan kan hun kind resusfactorpositief bloed hebben. Het bloed van het kind kan in het bloed van de moeder terecht komen. Dit gebeurt soms tijdens de zwangerschap, maar vaak tijdens de bevalling. De moeder zal in dit geval antistoffen aanmaken. Bij een volgende zwangerschap bestaat de kans dat de antistoffen van de moeder het bloed van het kind vernietigen. Daarom wordt het bloed van een resusfactornegatieve vrouw die bevallen is van een resusfactorpositief kind gecontroleerd op de aanwezigheid op resusfactorantistoffen. Na de bevalling van een resusfactorpositief kind krijgt de moeder anti-D toegediend. Dit medicijn voorkomt dat er resusfactorantistoffen in het bloed gaan circuleren en een volgende zwangerschap onveilig maken.

In de volgende reeks vragen gaan we op zoek naar de kans op een resusfactornegatieve moeder die zwanger is van een resusfactorpositief kind.

17. Geef de mogelijke genotypen van vader en moeder. Bepaal vervolgens de genotypen van hun eventuele kinderen met de bijbehorende kansen.

    (moeder: rr, vader: RR,: kind: Rr met kans 1,

    moeder: rr vader: Rr, kind: Rr of rr, elk met kans 0,5*)*

18. Bepaal nu de kans op een resusfactornegatieve moeder die zwanger is van een resusfactorpositief kind.

    (Uit de vorige vraag volgt dat er twee mogelijkheden zijn: moeder is rr en vader is RR of moeder is rr en vader is Rr. Maak een kansboom met als knopen de genotypen van moeder en de genotypen van vader. De bijbehorende kansen vind je bij vraag 3 hierboven. Dan vind je de volgende kansen $P(RR \text{ en } rr) = 0,37 \cdot 0,15 = 0,0555$ *en* $P(Rr \text{ en } rr) = 0,48 \cdot 0,15 = 0,072$. *De kans op een resusfactornegatieve moeder die zwanger is van een resusfactorpositief kind is dan:* $0,0555 \cdot 1 + 0,072 \cdot 0,5 = 0,092$.*)*

In de vorige werktekst leerden we al dat de dominantie van een allel niets zegt over de aanwezigheid van het allel in een populatie. Bij de bloedgroepen constateren we dat bloedgroep O de meest voorkomende bloedgroep is terwijl het allel voor bloedgroep O een recessief allel is. In wat volgt zoeken we hiervoor een verklaring.

Bij het ABO-bloedgroepensysteem kan men de wet van Hardy-Weinberg als volgt uitbreiden: $p + q + r = 1$ met *p* de kans voor het allel I_A , *q* de kans voor het allel I_B en r de kans voor het allel *i*.

19. Toon aan dat $p^2 + q^2 + r^2 + 2pq + 2pr + 2qr = 1$.

20. Wat betekenen de verschillende termen in de som uit vraag 1?

    (p^2 is de kans voor het genotype I_AI_A, q^2 voor I_BI_B, r^2 voor ii, $2pq$ voor I_AI_B, $2pr$ voor I_Ai en $2qr$ voor I_Bi.)

21. Verklaar waarom we weten dat $r^2 = 0,45$ en $2pq = 0,03$.

    (45% van de mensen heeft bloedgroep O (ii) en 3% heeft bloedgroep AB(I_AI_B).)

22. Waarom kennen we de andere termen van de som uit vraag 1 (nog) niet?

    (We hebben wel gegevens over de bloedgroepen A en B maar niet over de genotypen.)

23. Bepaal $p + q$ en $p \cdot q$.

    ($r^2 = 0,45 \Rightarrow r = \sqrt{0,45} \Rightarrow p + q = 1 - \sqrt{0,45}$ *en* $pq = 0,015$ *)*

24. Bepaal *p* en *q*.

    (p en q zijn de oplossingen van de vergelijking $x^2 - \left(1 - \sqrt{0,45}\right)x + 0,015 = 0$, *namelijk* $x = 0,27$ *of* $x = 0,05$. *Daar bloedgroep A meer voorkomt dan bloedgroep B is* $p = 0,27$ en $q = 0,05$.*)*

25. Wat kan je besluiten over de verdeling van de allelen bij de Belgische bevolking? Wat is het meest voorkomende allel?

    (De kans voor het allel I_A is 0,27*; de kans voor het allel I_B is* 0,05 *en de kans voor het allel i is* 0,67. *Het meest voorkomende allel is bijgevolg het recessieve i.)*

6 Nitraten

Het laatste lesidee is gegroeid vanuit het project in deel 1 'Expeditie zeeleeuw' waarbij de leerlingen tijdens het veldwerk aan zee abiotische factoren bepalen: temperatuur van het water, zoutgehalte van het water, fosfaten, nitraten en zuurstof. Nitraatgehalte in water is een onderwerp dat bij de inleiding van het integraalbegrip is opgenomen in een wiskundehandboek.

Nitraten worden niet zo uitgebreid behandeld. Hun betekenis wordt besproken onder meer tijdens de lessen over de stikstofcyclus. Deze cyclus wordt alleen gegeven aan de sterke richtingen. Het begrip stikstof krijgt in deze lessen een inhoud. Tijdens een mogelijke excursie kunnen nitraten bepaald worden.

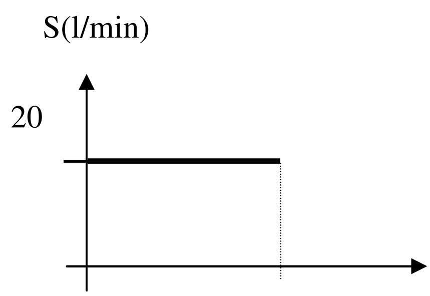
Door de jaren heen hebben integralen heel wat van de aandacht verloren. Opvallend is dat ze in de algemene eindtermen niet meer voorkomen. In het specifieke gedeelte, dat enkel bedoeld is voor sterke wiskundige richtingen, vinden we nog 'de bepaalde en onbepaalde integraal van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken'. In de leerplannen vind je het onderwerp echter nog terug in heel wat meer richtingen. We merken een klein verschil tussen het vrij onderwijs en het gemeenschapsonderwijs. In het vrij onderwijs krijgen alle sterke TSO en alle ASO richtingen integralen voorgeschoteld. In het gemeenschapsonderwijs vind je het onderwerp terug in alle sterke TSO en ASO richtingen. Het komt niet voor in de basisvorming van de richtingen met minder lesuren (2 à 3u per week), wel in het specifieke gedeelte van enkele richtingen. Het accent ligt in het vrij onderwijs meer dan in het gemeenschapsonderwijs op de begripsvorming in de beginfase. De pedagogisch-didactische wenken vermelden expliciet het zinvol maken van de oppervlakte door leerlingen te confronteren met problemen die te herleiden zijn tot de berekening van de oppervlakte tussen de grafiek van een functie en de horizontale as.

De onderstaande twee voorbeelden vormen een mogelijke inleiding op het integraalbegrip. Ze worden aangeboden in werktekstvorm.

Voorbeeld 1: Een bad nemen

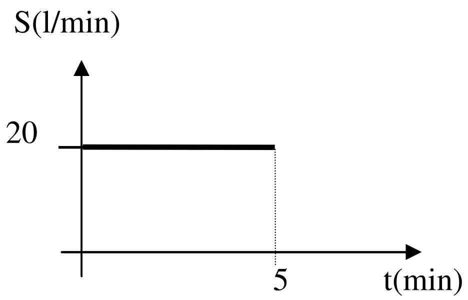
Het water loopt

Mr. Zeep neemt elke zaterdag een bad. Hij laat het water lopen, voelt of het warm is en sluit vervolgens de stop. Op dit moment beginnen we te meten. Het water stroomt in bad tegen een snelheid van 20 liter per minuut. Na 5 minuten is het bad half vol. Voor Mr. Zeep volstaat dit vandaag en hij sluit het kraantje. De onderstaande grafiek geeft de snelheid van het water (S in l/min) in functie van de tijd (t):



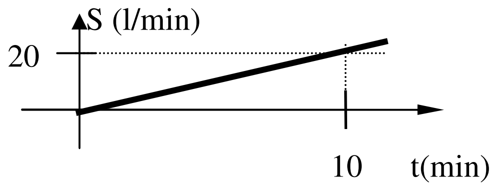
5 t(min)

1. Geef de vergelijking van de functie die de snelheid van het water uitdrukt in functie van de tijd.
2. Hoeveel liter is er in bad na 5 minuten? En na t minuten?
3. Teken de grafiek van de inhoud van het bad (V) in functie van de tijd.
4. In vraag 2 heb je de inhoud van het bad berekend na 5 minuten. Hiervoor vond je wellicht $20\times5=100$. Zo is de inhoud van het bad na 15 minuten $20\times15=300$ liter. We berekenen hier telkens de oppervlakte van een meetkundige figuur. Welke figuur? Duid op de grafiek de figuur aan waarvan 100 de oppervlakte is. Wat zijn de dimensies (afmetingen) van deze figuur?



Het kraantje opendraaien.

We kunnen tevens beginnen meten op het moment dat Mr. Zeep het kraantje opendraait. De snelheid van het water verandert dan zoals aangegeven op onderstaande grafiek.



5. Geef de vergelijking van de functie die de snelheid van het water uitdrukt in functie van de tijd.

De inhoud van het bad vinden is nu niet meer zo eenvoudig daar de snelheid voortdurend verandert. We zullen werken met de gemiddelde snelheid in bepaalde tijdsintervallen.

6. Vervolledig volgende tabel. Je moet niets invullen in de grijze cellen. Verifieer eerst dat de snelheid na 3 minuten inderdaad 6 l/min is en na 6 minuten 12 l/min. De gemiddelde snelheid tijdens de eerste 3 minuten wordt berekend als volgt: $\frac{S(0)+S(3)}{2}$ waarbij S(0) de snelheid is op 0 min en, S(3) de snelheid op 3 min.

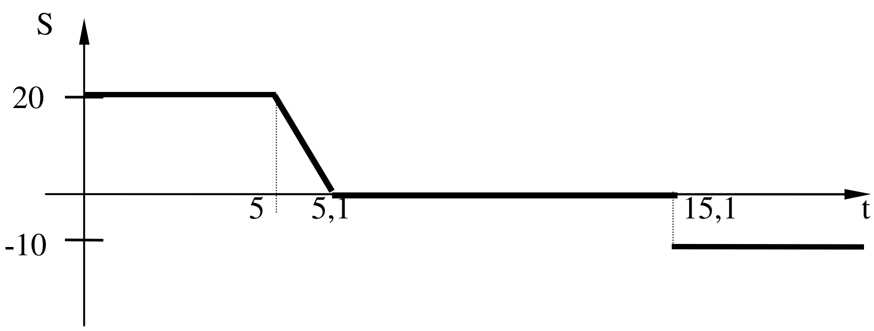
Tijdsinterval	0 – 3 min	3 – 6 min	6 – 9 min	9 – 12 min	12 - 15 min	…	t-3 - t
Gemiddelde snelheid in opeenvolgende tijdsintervallen van 3 minuten in l/min	$\frac{0+6}{2}=3$	$\frac{6+12}{2}=$					
Volume water dat in het bad stroomt tijdens opeenvolgende tijdsintervallen van 3 minuten in lit.	3x3=9	9x3=27					
Totale hoeveelheid water in het bad op het einde van het tijdsinterval in lit.	9	9+27=36					

7. In de tabel vind je de hoeveelheid water die er in het bad is na 15 minuten. Je vond wellicht 225 liter. Zoals in de eerste situatie waarbij het water al loopt, kan je dit getal weer koppelen aan de oppervlakte van een meetkundige figuur die opgebouwd kan worden m.b.v. de grafiek van de snelheidsfunctie. Welke meetkundige figuur? Verduidelijk je antwoord met een tekening.
8. Teken de grafiek van de inhoud van het bad in functie van de tijd.

De vorige voorbeelden leerden ons dat de inhoud van een bad gevonden kan worden door een meetkundige grootheid te berekenen, nl. de oppervlakte van de figuur boven het interval [0,15] en onder de grafiek van de snelheidsfunctie. We gebruiken dit om het volgende voorbeeld te behandelen.

Het bad laten leeglopen

We beschouwen weer de eerste situatie waarbij Mr. Zeep eerst het water warm laat worden, alvorens hij het bad begint te vullen. Het kraantje staat open en het water stroomt in bad met een snelheid van 20 liter per minuut. Na 5 minuten is het bad halfvol en Mr. Zeep sluit het kraantje, dit duurt 6 seconden. Mr. Zeep blijft nu 10 minuten in bad en wast zich. Vervolgens laat hij het water uit het bad lopen. Het stroomt weg tegen een snelheid van 10 liter per minuut. De onderstaande grafiek geeft de snelheid van het water (S in l/min) in functie van de tijd (t in min):



9. Bekijk de grafiek boven het interval [5;5,1] en leg uit wat Mr. Zeep op dit moment doet.
10. Hoeveel liter is er in het bad na 1; 5; 5,1; 7; 15; 20 minuten?
11. Na hoeveel minuten is het bad terug leeg?

12. Geef de vergelijking van de functie die de snelheid van het water uitdrukt als functie van de tijd. Voor het stukje functie dat hoort bij het dichtdraaien van de kraan moet je wellicht wat berekeningen uitvoeren, doe dat in het aparte kader onder de samenvatting.

Voor de eerste 5 minuten:	S(t) = _____________	$0 < t \leq 5$
Voor de volgende 6 seconden:	S(t) = _____________	$5 < t \leq$ ______
Voor de volgende 10 minuten:	S(t) = _____________	___$< t \leq$____
Voor de laatste minuten:	S(t) = _____________	$t >$ ____

Berekeningen

13. Op welke manier kan je het watervolume berekenen als meetkundige grootheid?
14. Geef de vergelijking van de functie die het watervolume V (in liter) uitdrukt als functie van de tijd (in minuten) . Voer eventuele berekeningen weer onder de samenvatting uit.

Voor de eerste 5 minuten:	V(t) = _____________	$0 < t \leq 5$
Voor de volgende 6 seconden:	V(t) = _____________	$5 < t \leq$_____
Voor de volgende 10 minuten:	V(t) = _____________	____ $< t \leq$ ________
Voor de laatste minuten:	V(t) = _____________	$t >$ ______

Berekeningen

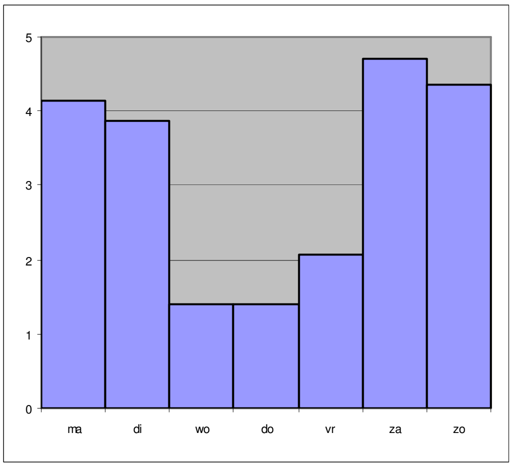
15. Teken de grafiek van het watervolume.
16. Bereken nu in elk van de vorige tijdsintervallen de afgeleide van V(t).
17. Vergelijk deze met S(t). Wat valt je op?

Voorbeeld 2: het nitraatgehalte in water

Een bedrijf, gelegen aan een rivier die uitmondt in de Schelde, loost regelmatig nitraatafval. Het heeft een vergunning gekregen van de overheid voor het lozen van 1 ton per week. De stroomsnelheid van de rivier wordt verondersteld constant te zijn met een debiet van 40 000 m^3 water per dag. Stroomafwaarts wordt éénmaal per dag (op de middag) een watermonster gemeten. Voor deze week geeft dit:

Dag	ma	Di	wo	do	vr	za	zo
concentratie in g/m^3	4,1422	3,8695	1,3924	1,4077	2,0772	4,7168	4,3671

Via deze meetresultaten kan men de hoeveelheid nitraten schatten die het meetstation passeert.
Hoe zou je de hoeveelheid nitraten n berekenen die gedurende een tijdsinterval Δt (in dit geval een dag), bij een debiet D (in dit geval 40000 m^3 water per dag), en een gemeten concentratie c geloosd wordt?

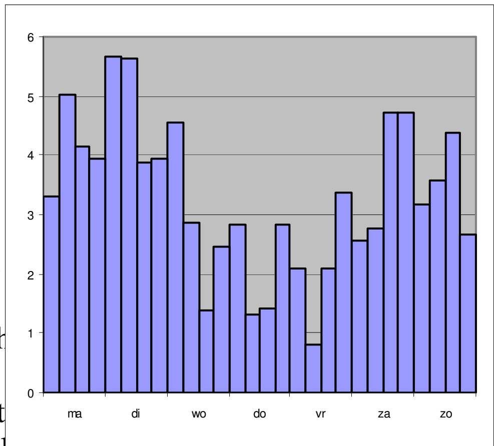


$n =$

1. Bereken nu op basis van deze formule de hoeveelheid nitraten die gedurende de hele week geloosd werden.
2. Welke (meetkundige) grootheid is rechtevenredig met deze hoeveelheid nitraten:

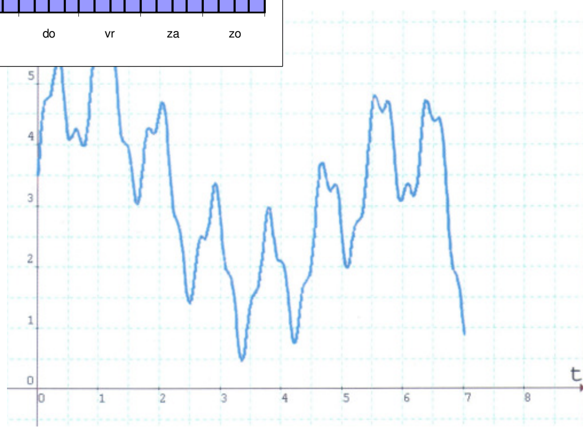
Wegens het grote debiet is er ook een snelle verandering in concentratie. De enige manier om nauwkeuriger de lozing van de fabriek te controleren is vaker meten. In plaats van éénmaal per dag, besluit men viermaal daags (0u00, 6u00, 12u00, 18u00) te meten. Dit geeft het volgende resultaat:

Dag	ma	Di	wo	do	vr	za	zo
concentratie in g/m^3	3,3125	5,6543	4,5584	2,8287	2,0940	2,5585	3,1619
	5,0201	5,6253	2,8495	1,3164	0,8139	2,7580	3,5597
	4,1422	3,8695	1,3924	1,4077	2,0772	4,7168	4,3671
	3,9488	3,9294	2,4673	2,8228	3,3753	4,7266	2,6789



3. Bereken met deze gegevens ... de nitraten voor de hele week.
4. Welke (meetkundige) grooth... lheid nitraten.

Het grote verschil gemet... nauwkeurigere waarneming, leidde tot de plaatsing van een sensor in het water, die continu stalen neemt. De sensor geeft een signaal dat wordt doorgegeven aan een plotter, die een directe grafische weergave levert van het gemeten signaal: een grafiek van het gemeten nitraatgehalte (in g/m^3) als functie van de tijd (in dagen).



5. Welke grootheid gaat in dit geval een maat zijn (evenredig zijn) met de hoeveelheid geloosde nitraten in die week?

Besluit

In bovenstaande voorbeelden werken we telkens met twee functies. Voorbeeld 1 behandelt de functie van het watervolume in relatie tot de tijd en de functie van de snelheid waarmee het water stroomt in relatie tot de tijd. Voorbeeld 2 behandelt de functie van de nitraatconcentratie afhankelijk van de tijd en de functie van de hoeveelheid nitraten. We ontdekten:

1 A.d.h.v. de snelheid waarmee het water stroomt, kunnen we het watervolume bepalen in relatie tot de tijd. A.d.h.v. de concentratie van nitraten, kunnen we de hoeveelheid nitraten bepalen in relatie tot de tijd.

2 Om watervolume of hoeveelheid nitraten te vinden, moeten we blijkbaar de oppervlakte bepalen van het gebied tussen de grafiek van de snelheid of de nitraatconcentratie en de tijdsas over het beschouwde interval.

3 We werken op een speciale manier met oppervlaktes.

3.1 De eenheid is niet noodzakelijk m², cm², km², … maar is het product van de eenheden van de assen (hier liter of $\frac{g \cdot d}{m^3}$ waarbij d staat voor tijd in dagen).

3.2 In voorbeeld 1 beschouwen we bij de oppervlakte een teken. Als de snelheid negatief is (de grafiek is onder the tijdsas, het water stroomt uit het bad), koppelen we een negatief teken aan de oppervlakte.

4 In voorbeeld één stelden we ook een vergelijking van beide functies op. Hierdoor konden we afgeleiden bepalen We merkten dat de afgeleide van het watervolume, de snelheid van het water blijkt te zijn:

$$DV(t) = S(t)$$

Uit de voorgaande voorbeelden blijkt duidelijk dat de oppervlakte tussen de grafiek van een functie en de x-as dikwijls een betekenis heeft. Vanuit wiskundig oogpunt is het dus nuttig om een techniek te ontwikkelen die toelaat om zulke oppervlakten te berekenen. Dit gebeurt in de integraalrekening.

Referenties

Deprez, J. & Verbeeck, G. (2006). Logistische groei, *Uitwiskeling, 22.2*, 14-48.

Verbeeck, G. (2005). Phyllotaxis, Fibonacci en de gulden snede, *Uitwiskeling 21.2,* 3-9.

Deprez, J. & Roels, J. & Tytgat, P. (2005). Lineaire regressie, *Uitwiskeling 21.2,* 10-47.

De Schutter, P. e.a. (2004), Bioskoop 5/6A, Kapellen: Pelckmans

Cauwenberg, B.,Dries, I. & Senten, C. (2004). Fenotypes bij fruitvliegjes, *Werk studenten lerarenopleiding UA.*

Berghmans, B., Claes, D., Philips, N. & Roovers S. (2004). Biologie en wiskunde: een vruchtbare samenwerking, *Werk studenten lerarenopleiding UA*.

Op de Beeck, R. & Verbeeck, G. (2004). Wiskunde en biologie, *Uitwiskeling, 21.1,* 14-43

Gevers, P. e.a (2003). *Delta 5: Analyse 4 lesuren*, Mechelen: Wolters Plantyn.

Geuns, J. e.a. (2002). *Werkboek Macro/micro in de biologie 4*, Mechelen: Wolters Plantyn.

Geuns, J. e.a. (2002). *Macro/micro in de biologie 4*, Mechelen: Wolters Plantyn.

Deprez, J. & Eggermont, H. (2002). Migratie- en Lesliematrices, *Uitwiskeling 19.1,* 15-59.

Bogaert, P. e.a.(±2000). *Van Basis tot limiet 4: leerweg 5 …/rijen/…*, Brugge: Die Keure.

Bogaert, P. e.a.(±2000). *Van Basis tot limiet 5,* Brugge: Die Keure

Bogaert, P. e.a.(±2000). *Van Basis tot limiet Leerboek 4: Integraalrekening leerweg 6/8*, Brugge: Die Keure

De Schutter, P. e.a. (1999). *Bioskoop 4,* Kapellen: Pelckmans.

(1999). Enkele *inleidende modules vir Graad 12 Wiskunde. 'n Uitkomsbaseerde benadering*, Universiteit van Stellenbosch en KUL

Roels, J. e.a. (1990). *Wiskunde vanuit toepassingen*, Leuven : Acco.

Cambar, R. & Gipouloux, J.D. (1956). Table chronologique du développement embryonnaire et larvaire du crapaud commun: *Bufo bufo L.*, Bull. Biol. France Belgique 90 (2), 198-217

Kennislink, *Het wonder van de Waddenzee*, http://www.kennislink.nl/web/show?id=75308&print=true

Rijksdienst voor de Monumentenzorg, *Overlast door duiven*, http://www.monumentenzorg.nl/download/info_r&b/rdmz_info_r&b_09-2000.pdf

Wikipedia, *Duiven en tortelduiven*, http://nl.wikipedia.org/wiki/Duiven_en_tortelduiven